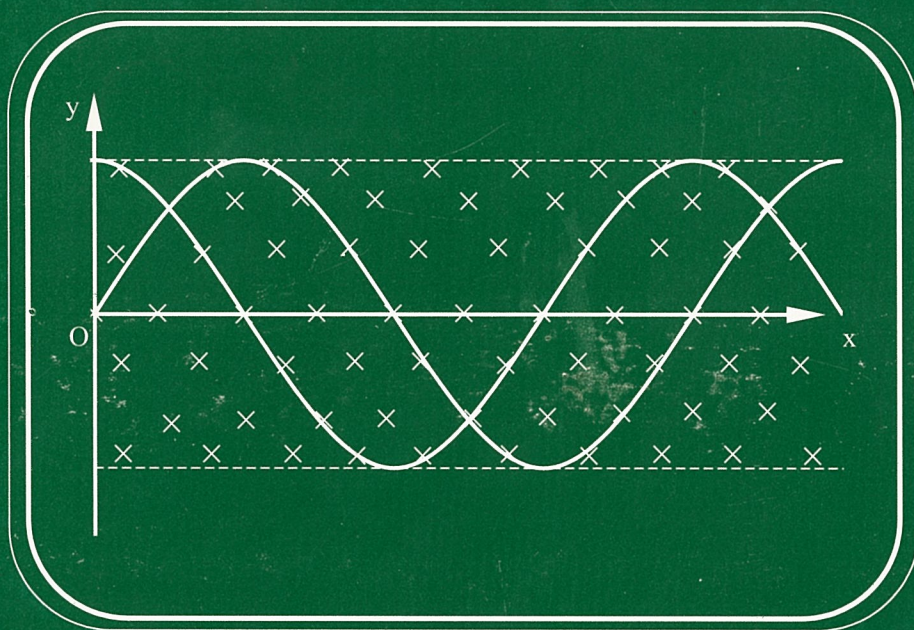


สมการเชิงอนุพันธ์

แบบธรรมดา : ฉบับแนะนำ



รศ.ดร.พิชากร แปลงประสพโชค

สมการเชิงอนุพันธ์
แบบธรรมดา : ฉบับแนะนำ

รศ.ดร.พิชกร แปลงประสพโชค

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ข้อมูลทางบรรณานุกรม

พิชากร แปลงประสพโชค. สมการเชิงอนุพันธ์ แบบธรรมดา : ฉบับแนะนำ. พิมพ์ครั้งที่ 1.

กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ, 2541.

พิมพ์ครั้งที่ 1 จำนวน 1,500 เล่ม มิถุนายน 2542

จัดจำหน่ายโดย สมวงษ์ แปลงประสพโชค 106 / 58 รามอินทรา 71

กรุงเทพฯ 10230 โทร. 510-5680

คำนำ

ในการเขียนตำรา "สมการเชิงอนุพันธ์แบบธรรมดา : ฉบับแนะนำ" มีจุดประสงค์แสดงเหตุผลกับที่มาของวิธีแก้สมการแบบต่างๆ ให้ผู้เรียนใช้ความเข้าใจแก้สมการมากกว่าการใช้ความจำ ลักษณะการเขียนจึงมักเริ่มที่แสดงที่มาหรือทฤษฎีบทก่อนแล้วนำทฤษฎีบทไปใช้ในการแก้สมการ ทฤษฎีบทส่วนใหญ่จะพิสูจน์ ยกเว้นทฤษฎีบทที่ยาก เช่น ทฤษฎีบทการมีคำตอบหนึ่งเดียว (Existence and Uniqueness Theorem) เป็นต้น จะไว้ในภาคผนวกหรือแสดงในหนังสือบรรณานุกรม ทั้งนี้ยึดหลักว่าข้อใดมีผลกระทบกระเทือนต่อการแก้สมการโดยตรงจะพยายามแสดงเหตุผลเป็นภาคผนวกให้ครบถ้วน

สำหรับบทที่ 1 เป็นความรู้พื้นฐานที่ผู้เรียนควรมีพร้อมก่อน เช่น แคลคูลัส โดยเฉพาะการอินทิเกรต ผู้เรียนต้องฝึกฝนให้คล่อง จึงได้เสนอวิธีการอินทิเกรตแบบลัดที่เป็นไปได้ ส่วนวิชาพีชคณิตเชิงเส้นจะใช้เป็นพื้นฐานของบทที่ 4 สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับ n ทฤษฎีบทที่จำเป็นแต่มีพิสูจน์ในตำราฉบับภาษาไทย ผู้เขียนจะละเว้นการพิสูจน์ จะพิสูจน์เฉพาะทฤษฎีบทที่นำมาอ้างในสมการเชิงอนุพันธ์และไม่มีตำราฉบับภาษาไทยกล่าวไว้

ศัพท์ที่ใช้ในหนังสือเล่มนี้ ผู้เขียนพยายามใช้ตามศัพท์ราชบัณฑิต ถ้าไม่มีศัพท์อื่นที่กระชับและความหมายถูกต้องกว่า ท่านที่ต้องการตรวจสอบศัพท์อาจค้นจากครรรชนี ซึ่งอยู่ท้ายเล่ม

สำหรับแบบฝึกหัดจะแบ่งเป็นสองส่วน คือ สำหรับฝึกส่วนหนึ่ง และส่วนเสริมสร้างความรู้ใหม่ เพื่อความสมบูรณ์ของความรู้ ส่วนหลังจะแรงงาไว้ ข้อที่ * ไว้อาจดูยากหรือทำไม่ได้เลย เพื่อศึกษาต่อๆ มาลองกลับมาทำใหม่จะพบวิธีทำที่ง่ายกว่า

ผู้เขียนรู้สึกซาบซึ้งในพระคุณท่านอาจารย์ รศ.สุเทพ จันทรมศักดิ์ และคณาจารย์ในภาควิชาคณิตศาสตร์ที่พยายามช่วยเหลือผู้เขียนให้มีโอกาสศึกษาค้นคว้าเต็มที่ และให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ ท่านอาจารย์ยงยุทธ ธนุกฤติ ที่กรุณาตรวจให้เท่าที่โอกาสจะอำนวย กัลยาณมิตร คือ รศ.ดร.สุเทพ ทองอยู่ ให้กำลังใจและให้ยืมตำราที่ใช้เป็นหลักในการเขียนหลายเล่ม

ความดีของหนังสือเล่มนี้ขอบอบแด่ภรรยาและบุตรทั้งสองของผู้เขียนที่ช่วยเหลือด้านการเตรียมต้นฉบับและส่งเสบียงอาหารตามสติกำลังจะอำนวย



(พิชากร แปลงประสพโชค)

มิถุนายน 2542

สารบัญ

	หน้า
บทที่ 1 ความรู้พื้นฐาน	1
1.1 สูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชัน	1
1.2 สูตรอินทิกรัลเบื้องต้น	2
1.3 ตัวอย่างการอินทิเกรตโดยวิธีรวบรัด	3
1.4 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน 2 ตัวแปร	4
1.5 การหาอนุพันธ์บางอินทิกรัล	5
1.6 พีชคณิตเชิงเส้น	6
1.7 ประวัติสมการเชิงอนุพันธ์	10
1.8 บทนิยามของสมการเชิงอนุพันธ์	12
1.9 ทฤษฎีบทการมีคำตอบหนึ่งเดียว	18
1.10 การกำจัดตัวคงค่าไม่เจาะจง	22
บทที่ 2 การแก้สมการเชิงอนุพันธ์ อันดับ 1 ดีกรี 1	27
2.1 รูปสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 ดีกรี 1	27
2.2 สมการแบบ $\frac{dy}{dx} = f(x)$	27
2.3 สมการแบบแยกตัวแปรได้	28
2.4 สมการสัมประสิทธิ์เอกพันธ์	31
2.5 สมการแม่นตรง	37
2.6 ตัวประกอบเพื่ออินทิเกรต	44
2.7 สมการเชิงเส้นอันดับ 1	54
2.8 สมการในรูป $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right), a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2 \neq 0$	58
2.9 แบบและการแก้สมการอันดับ 1 ดีกรี 1	64
2.10 การตีความทางเรขาคณิตของสมการเชิงอนุพันธ์ อันดับ 1	67
2.11 สมการอันดับ 1 ที่มีดีกรีสูงกว่า 1	73
บทที่ 3 การประยุกต์ของสมการอันดับ 1	82
3.1 เรขาคณิต	82
3.2 ทราเจกทอรีมุมฉาก	88
3.3 การประยุกต์ทางกลศาสตร์	97
3.4 การประยุกต์ทางวงจรไฟฟ้า	110

	หน้า
3.5 การสลายตัวของธาตุกัมมันตภาพรังสี	115
3.6 การประยุกต์ทางเคมี	119
บทที่ 4 สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น อันดับ n	128
4.1 รูปสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับ n	128
4.2 สมการเอกพันธ์	139
4.3 ความเป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น	131
4.4 ตัวดำเนินการดิฟเฟอเรนเชียลเชิงเส้น	138
4.5 คุณสมบัติบางประการของตัวดำเนินการดิฟเฟอเรนเชียล	145
4.6 คำตอบของสมการเอกพันธ์	148
4.7 คำตอบของสมการเชิงเส้นโดยทั่วไป	159
บทที่ 5 การแปลงลาปลาซ	173
5.1 บทนำ	173
5.2 สมบัติพื้นฐานของการแปลงลาปลาซ	177
5.3 การแปลงผกผันลาปลาซ	179
5.4 การแก้สมการเชิงอนุพันธ์โดยใช้ผลการแปลงลาปลาซ	181
บทที่ 6 คำตอบในรูปอนุกรม	190
6.1 บทนำ	190
6.2 ตัวอย่างการหาคำตอบในรูปอนุกรมยกกำลัง	193
6.3 คำตอบแบบอนุกรมรอบจุดโคเดเคียวปกติ	197
ภาคผนวก 1 ทฤษฎีบทการมีคำตอบหนึ่งเดียว	212
ภาคผนวก 2 ฟังก์ชันบางฟังก์ชันที่มีผลการแปลงลาปลาซ	219
ภาคผนวก 3 ทฤษฎีบทของเลอว์ก	220
ภาคผนวก 4 อภิปราย คำตอบใกล้จุดโคเดเคียวปกติในกรณีทั่วไป	221
บรรณานุกรม	225
ดัชนี	227

บทที่ 1

ความรู้พื้นฐาน

1.1 สูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

1. $\frac{dc}{dx} = 0$
2. $\frac{dx}{dx} = 1$
3. $\frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}(cv) = c \frac{dv}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$
6. $\frac{d}{dx}(v^n) = nv^{n-1} \frac{dv}{dx}$
7. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$
8. $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$ เมื่อ $y = y(u)$
9. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ เมื่อ $y = f(x)$ ในช่วงที่ไม่มีช่วงย่อยที่ $f(x)$ คงที่
10. $\frac{d}{dx}(\ln v) = \frac{1}{v} \frac{dv}{dx}$
11. $\frac{d}{dx}(a^v) = a^v \ln a \frac{dv}{dx}$
12. $\frac{d}{dx}(e^v) = e^v \frac{dv}{dx}$
13. $\frac{d}{dx}(u^v) = v u^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}$
14. $\frac{d}{dx}(\sin v) = \cos v \frac{dv}{dx}$
15. $\frac{d}{dx}(\cos v) = -\sin v \frac{dv}{dx}$
16. $\frac{d}{dx}(\tan v) = \sec^2 v \frac{dv}{dx}$
17. $\frac{d}{dx}(\cot v) = -\csc^2 v \frac{dv}{dx}$
18. $\frac{d}{dx}(\sec v) = \sec v \tan v \frac{dv}{dx}$
19. $\frac{d}{dx}(\csc v) = -\csc v \cot v \frac{dv}{dx}$
20. $\frac{d}{dx}(\arcsin v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \left(\frac{dv}{dx}\right)$
21. $\frac{d}{dx}(\arccos v) = -\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \left(\frac{dv}{dx}\right)$

$$22. \frac{d}{dx}(\arctan v) = \frac{1}{1+v^2} \left(\frac{dv}{dx} \right)$$

$$23. \frac{d}{dx}(\operatorname{arccot} v) = -\frac{1}{1+v^2} \left(\frac{dv}{dx} \right)$$

$$24. \frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec} v) = \frac{1}{v\sqrt{v^2-1}} \left(\frac{dv}{dx} \right)$$

$$25. \frac{d}{dx}(\operatorname{arccsc} v) = -\frac{1}{v\sqrt{v^2-1}} \left(\frac{dv}{dx} \right)$$

26. (Leibniz's rule for differentiation)

$$\frac{d^n}{dx^n}(uv) = u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2}u^{(n-2)}v'' + \dots + \binom{n}{n}u^{(1)}v^{(n)}$$

$$\text{เมื่อ } w^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n}(w)$$

1.2 สูตรอินทิกรัลเบื้องต้น

1. $\int (du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw$
2. $\int au \, dx = a \int u \, dx$
3. $\int du = u + c$
4. $\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c, \quad (n \neq -1)$
5. $\int \frac{du}{u} = \ln |u| + c$
6. $\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + c$
7. $\int e^u \, du = e^u + c$
8. $\int \sin u \, du = -\cos u + c$
9. $\int \cos u \, du = \sin u + c$
10. $\int \sec^2 u \, du = \tan u + c$
11. $\int \csc^2 u \, du = -\cot u + c$
12. $\int \sec u \tan u \, du = \sec u + c$
13. $\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + c$
14. $\int \tan u \, du = \ln |\sec u| + c$
15. $\int \cot u \, du = \ln |\sin u| + c$
16. $\int \sec u \, du = \ln |\sec u + \tan u| + c$
17. $\int \csc u \, du = \ln |\csc u - \cot u| + c$

18. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + c$
19. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + c$
20. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + c$
21. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + c$
22. $\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + c$
23. $\int u dv = uv - \int v du$ (integration by part)
24. $\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + c$
25. $\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (b \sin bx + a \cos bx) + c$

1.3 ตัวอย่างการอินทิเกรตโดยวิธีรวบรัด

หัวข้อเครื่องหมาย * ให้ศึกษาและยึดเป็นแนวทาง

$$*1. \int u^5 e^u du = u^5 e^u - 5u^4 e^u + 20u^3 e^u - 60u^2 e^u + 120u e^u - 120e^u + c$$

ที่มา : ใช้วิธีการอินทิเกรตทีละส่วน เครื่องหมายบวกกลับจึงเกิดสลับกัน ทุกพจน์

ที่เป็นตัวแปรจะมี e^u ส่วนข้างหน้าของ e^u ในแต่ละพจน์เกิดจากการหา

อนุพันธ์ส่วนข้างหน้าของ e^u ในพจน์ก่อน ๆ เช่น $5u^4$ ในพจน์ที่สองได้

มาจาก $\frac{d}{du} u^5$

$$\begin{aligned} 2. \int x^3 e^{-x} dx &= \int (-x) e^{-x} d(-x) \\ &= (-x) e^{-x} - 3(-x) e^{-x} + 6(-x) e^{-x} - 6e^{-x} + c \\ &= -x e^{-x} - 3x e^{-x} - 6x e^{-x} - 6e^{-x} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \int x^4 e^{-x} dx &= -\int (-x) e^{-x} d(-x) \\ &= -(-x) e^{-x} + 4(-x) e^{-x} - 12(-x) e^{-x} + 24(-x) e^{-x} + 24e^{-x} + c \\ &= -x e^{-x} - 4x e^{-x} - 12x e^{-x} - 24x e^{-x} - 24e^{-x} + c \end{aligned}$$

$$*4. \int u^4 \sin u du = -u^4 \cos u + 4u^3 \sin u + 12u^2 \cos u - 24u \sin u + 24 \cos u + c$$

ที่มา : ใช้วิธีการอินทิเกรตทีละส่วน จัดรูป $\int u^4 \sin u du = -\int u^4 d \cos u$

$= -u^4 \cos u + \int 4u^3 \cos u du$ ซึ่ง $\int \cos u du = \sin u$ เมื่อเราเริ่มพจน์แรก

ได้ดังนี้ พจน์ต่อไปเกิดจากการหาอนุพันธ์ ส่วนพหุนาม และ
ค่า $\sin u$, $\cos u$ ในลักษณะแยกกันแล้วนำมาคูณกัน เช่น ในพจน์ที่
สอง $4u^3$ และ $\sin u$ ได้จาก $\frac{d}{du}u^4$ และ $\frac{d}{dx}(-\cos u)$ ตามลำดับ

$$5. \int u^3 \cos u \, du = u^3 \sin u + 3u^2 \cos u - 6u \sin u - 6 \cos u + c$$

$$\begin{aligned} 6. \int x^3 \sin 2x \, dx &= \frac{1}{16} \int (2x)^3 \sin 2x \, d(2x) \\ &= \frac{1}{16} [- (2x)^3 \cos 2x + 3(2x)^2 \sin 2x + 6(2x) \cos 2x - 6 \sin 2x] + c \\ &= -\frac{x^3}{2} \cos 2x + \frac{3}{4} x^2 \sin 2x + \frac{3}{4} x \cos 2x - \frac{3}{8} \sin 2x + c \end{aligned}$$

$$*7. \int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx, \quad n \geq 2$$

$$*8. \int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx, \quad n \geq 2$$

$$*9. \int \tan^n x \, dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x \, dx, \quad n \geq 2$$

$$*10. \int \sec^n x \, dx = \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x \, dx, \quad n \geq 2$$

$$\begin{aligned} 11. \int \sec^3 x \, dx &= \frac{\sec x \tan x}{2} + \frac{1}{2} \int \sec x \, dx + c \\ &= \frac{\sec x \tan x}{2} + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12. \int \sec^5 x \, dx &= \frac{\sec^3 x \tan x}{4} + \frac{3}{4} \int \sec^3 x \, dx \\ &= \frac{\sec^3 x \tan x}{4} + \frac{3}{4} \frac{\sec x \tan x}{2} + \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \ln |\sec x + \tan x| + c \end{aligned}$$

1.4 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน 2 ตัวแปร

บทนิยาม ให้ $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชัน 2 ตัวแปรนิยามบนบริเวณ R ในระนาบ xy

และ (x_1, y_1) เป็นจุดใน R f จะต่อเนื่องที่จุด (x_1, y_1) ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_1,y_1)} f(x,y) = f(x_1,y_1)$$

นั่นคือ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งสำหรับทุก $(x, y) \in R$

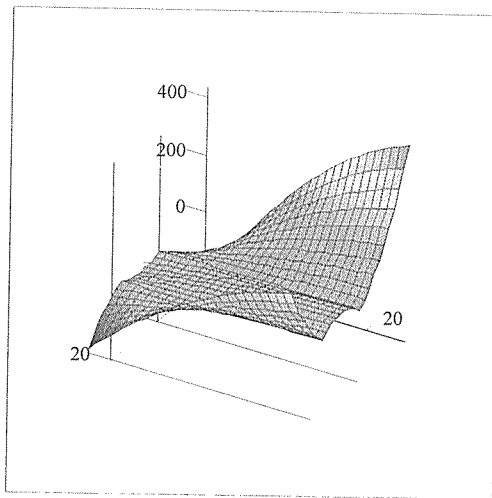
ถ้า $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ แล้ว $|f(x, y) - f(x_1, y_1)| < \varepsilon$

f ต่อเนื่องบน R ก็ต่อเมื่อ f ต่อเนื่อง ณ ทุกจุดใน R

ภาพฟังก์ชันต่อเนื่องทางเรขาคณิต

ถ้าให้ระยะทางแกน z แสดง $f(x, y)$ ซึ่ง f ต่อเนื่องบน R กราฟของ f จะเรียงตัวเป็นพื้น
เดียวไม่ทะลุหรือฉีกขาด

อนึ่ง ถ้า $\frac{\partial f}{\partial y}$ ต่อเนื่องใน R ด้วยจะได้กราฟของ f ไม่ยับยู่ยี่ อาจมีกลีบโดยสันกลีบจะเป็น
โค้งบนระนาบ $x = c$ บางระนาบ ดังรูป



กราฟของ $z = |x-1||x-3|(13y - y^2)$
 $\frac{\partial z}{\partial y}$ ต่อเนื่องแต่มีกลีบในแนว $x = 1$
 และ $x = 3$

1.5 การหาอนุพันธ์บางอินทิกรัล

ทฤษฎีบท ถ้า $f(x, t), f_1(x, t)^*$ ต่อเนื่องใน $a \leq t \leq b, A \leq x \leq B$

$$\text{จะได้ } \frac{d}{dx} \int_a^b f(x, t) dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

พิสูจน์ ให้ $F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$ ณ จุด $x_0, A < x_0 < B$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta F}{\Delta x} &= \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_a^b [f(x_0 + \Delta x, t) - f(x_0, t)] dt \\ &= \int_a^b f_1(x_0 + \theta \Delta x, t) dt, 0 < \theta < 1 \quad \text{โดย Mean Value Theorem*} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \left| \frac{\Delta F}{\Delta x} - \int_a^b f_1(x_0, t) dt \right| &= \left| \int_a^b [f_1(x_0 + \theta \Delta x, t) - f_1(x_0, t)] dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f_1(x_0 + \theta \Delta x, t) - f_1(x_0, t)| dt \end{aligned}$$

* $f_1(x, t)$ หมายถึง $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$

เนื่องจาก $f_1(x, t)$ ต่อเนื่องในสี่เหลี่ยมผืนผ้าปิด $a \leq t \leq b$, $A \leq x \leq B$ $f_1(x, t)$ จะต่อเนื่องแบบสม่ำเสมอในบริเวณนี้ด้วย ดังนั้น สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ มี $\delta > 0$ ซึ่งในกรณีที่

$$A < x_0 < B, A \leq x_0 + \theta \Delta x \leq B, |\Delta x| < \delta$$

จะได้ว่าสำหรับทุก t , $a \leq t \leq b$

$$|f_1(x_0 + \theta \Delta x, t) - f_1(x_0, t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{ ถ้า } |\Delta x| < \delta \text{ จะได้ } \left| \frac{\Delta F}{\Delta x} - \int_a^b f_1(x_0, t) dt \right| &< \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dt \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \left(\frac{d}{dx} F \right)(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} \\ &= \int_a^b f_1(x_0, t) dt \quad \text{ทุก ๆ ค่า } x_0 \end{aligned}$$

$$\text{และ } \frac{d}{dx} F(x) = \int_a^b f_1(x, t) dt \quad \square$$

1.6 พีชคณิตเชิงเส้น

1.6.1 ปริภูมิเวกเตอร์ (vector space)

บทนิยาม V จะเป็นปริภูมิเวกเตอร์ เหนือสนาม F ก็ต่อเมื่อ

1. $(V, +)$ เป็นกลุ่มอาบีเลียน ภายใต้บางโอเปอเรชัน $+$
2. มีฟังก์ชัน $\mu : F \times V \rightarrow V$ ซึ่ง μ เรียกว่า การคูณด้วยสเกลาร์ มีคุณสมบัติดังนี้

สำหรับทุก $c, d \in F$ และ $\alpha, \beta \in V$

$$2.1 \quad (c + d) \alpha = c\alpha + d\alpha$$

$$2.2 \quad c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta$$

$$2.3 \quad c(d\alpha) = (cd)\alpha$$

$$2.4 \quad 1\alpha = \alpha$$

เรียกสมาชิกใน V ว่าเวกเตอร์ และเรียกสมาชิกใน F ว่าสเกลาร์

1.6.2 ความเป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น (linear independence)

บทนิยาม (1) ถ้า $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ เป็นเวกเตอร์ และ $c_1, \dots, c_n$ เป็นสมาชิกของสนาม F เรียก

$$\alpha = c_1 \alpha_1 + \dots + c_n \alpha_n$$

ว่าผลรวมเชิงเส้นแบบหนึ่งของ $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

บทนิยาม (2) เซตของเวกเตอร์ $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ใน V จะเป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อ มีสเกลาร์ชุดเดียวเท่านั้น ที่ทำให้ผลรวมเชิงเส้น

$$c_1 \alpha_1 + \dots + c_n \alpha_n = \bar{0}$$

สเกลาร์ชุดนั้น คือ $c_1 = \dots = c_n = 0$

(นั่นคือ $c_1 \alpha_1 + \dots + c_n \alpha_n = \bar{0} \rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0$)

1.6.3 ฐาน (basis)

บทนิยาม เซตของเวกเตอร์ $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ใน V จะเป็นฐาน ก็ต่อเมื่อต่อไปนี้จริง

ก. $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ เป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น

ข. สามารถเขียนทุกเวกเตอร์ α ใน V เป็นผลรวมเชิงเส้นของ

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ได้ (หรือกล่าวว่า เซตนี้ แผล่คลุม (span) V)

ข้อสังเกต ปริภูมิเวกเตอร์หนึ่ง ๆ อาจมีฐานหลายฐาน

1.6.4 มิติ (dimension)

ทฤษฎีบท ถ้าปริภูมิเวกเตอร์ V มี $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ และ $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ เป็นฐาน

จะได้ $m = n$

บทนิยาม มิติของปริภูมิเวกเตอร์ V ซึ่ง $V \neq \{\bar{0}\}$ คือ จำนวนเวกเตอร์ในฐานของ V

ถ้า $V = \{\bar{0}\}$ เรากล่าวว่า V มีมิติ 0

ทฤษฎีบท กำหนดให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ ซึ่งมีมิติ n และ $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$,

($S \subset V$) เป็นอิสระเชิงเส้น มี n สมาชิก จะได้ว่า S เป็นฐานของ V

พิสูจน์ ถ้า S ไม่แผล่คลุม V จะมี α บางตัวใน V ที่ไม่เป็นผลรวมเชิงเส้นของ $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

ดังนั้น $\{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ เป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น

ให้ $b = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ เป็นฐานของ V

$\therefore T_1 = \{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n\}$ ไม่เป็นอิสระต่อกันเชิงเส้นจะมีบาง β_i เป็นผลรวมเชิงเส้นของ

เวกเตอร์ข้างหน้า ตัด β_i ออกได้เป็น

$$S_1 = \{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n\} \text{ ซึ่งแผล่คลุม } V$$

ให้ $T_2 = S_1 \cup \{\alpha_1\}$ T_2 ไม่เป็นอิสระต่อกันเชิงเส้นจะมีบาง β เป็นผลรวมเชิงเส้น

ของเวกเตอร์ข้างหน้า ตัด β นั้นออกจาก T_2 จะได้เซต S_2 ซึ่งแผล่คลุม V

ต่อไปทำเช่นนี้อีก คือ นำสมาชิกที่เหลือใน S เติมใน T_i แล้วตัดบาง β ใน T_i ออก

เหลือ S_i ซึ่งแผ่คลุม V จนได้ $S_n = \{\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1, \alpha\}$ ซึ่งแผ่คลุม V

ดังนั้น α_n เขียนเป็นผลรวมเชิงเส้นของ $\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1, \alpha$ ได้ซึ่งขัดแย้งกับที่ว่า

$\{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ เป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น

ดังนั้น S ต้องแผ่คลุม V และ S เป็นฐาน $\square$

1.6.5 การแปลงเชิงเส้น (linear transformation)

บทนิยาม (1) กำหนดปริภูมิเวกเตอร์ V และ W เรียกฟังก์ชัน T จาก V ไป W ว่าการแปลงเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก $\alpha, \beta \in V$ และทุกสเกลาร์ c

$$(1) T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta)$$

$$(2) T(c\alpha) = c T(\alpha)$$

บทนิยาม (2) ให้ $T : V \rightarrow W$ เป็นการแปลงเชิงเส้นจากปริภูมิเวกเตอร์ V ไปปริภูมิเวกเตอร์ W และ θ เป็นเอกลักษณ์ของ W เรียก

$$K = \{\alpha \in V \mid T(\alpha) = \theta\} \text{ ว่า เคอเนล (kernel) ของ } T$$

ทฤษฎีบท เคอเนลของการแปลงเชิงเส้น T จาก V ไป W จะเป็นปริภูมิย่อยของ V

พิสูจน์ ให้ K เป็นเคอเนลของ T

1. ถ้า $\alpha, \beta \in K$ จะได้ $T(\alpha) = \theta, T(\beta) = \theta$

$$\begin{aligned} \therefore T(\alpha + \beta) &= T(\alpha) + T(\beta) \\ &= \theta + \theta \\ &= \theta \end{aligned}$$

ดังนั้น $\alpha + \beta \in K$

2. ถ้า c เป็นสเกลาร์ และ $\alpha \in K$ ซึ่ง $T(\alpha) = \theta$

$$\begin{aligned} \therefore T(c\alpha) &= c T(\alpha) \\ &= c \theta \\ &= \theta \end{aligned}$$

ดังนั้น $c\alpha \in K$

จาก 1. และ 2. จะได้ K เป็นปริภูมิย่อยของ V $\square$

1.6.6 ผลคูณภายใน (inner product)

ให้ V เป็นเซตของฟังก์ชันที่มีนิยามบนช่วง J เดียวกัน นิยามการบวกและการคูณด้วยจำนวนดังต่อไปนี้

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ ทุก } f, g \in V$$

$$(af)(x) = af(x) \text{ ทุกจำนวน } a \text{ และทุก } f \in V$$

จะได้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ เรียก V ว่าปริภูมิฟังก์ชัน (function space)

กำหนดให้ V เป็นปริภูมิฟังก์ชัน บนสนามของจำนวนจริง หรือจำนวนเชิงซ้อน จะได้

$$V_n = \{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in V \} \text{ เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนามเดียวกัน}$$

เรานิยามผลคูณภายใน ใน V_n ดังนี้

$$\text{บทนิยาม ถ้า } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

$$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$$

เป็นสมาชิกของ V_n ให้ผลคูณภายใน ของ α, β คือ

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_n$$

ทฤษฎีบท ถ้า α, β, γ เป็นเวกเตอร์ใน V_n และ c เป็นจำนวนจริง หรือจำนวนเชิงซ้อน เราได้

$$1. \langle \alpha, \alpha \rangle \geq 0$$

$$2. \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$$

$$3. \langle \alpha, \beta + \gamma \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \alpha, \gamma \rangle$$

$$4. \langle c\alpha, \beta \rangle = c \langle \alpha, \beta \rangle$$

$$\text{พิสูจน์ } 1. \langle \alpha, \alpha \rangle = \alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 \geq 0$$

$$2. \langle \alpha, \beta \rangle = \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_n$$

$$= \beta_1 \alpha_1 + \dots + \beta_n \alpha_n$$

$$= \langle \beta, \alpha \rangle$$

$$3. \beta + \gamma = (\beta_1 + \gamma_1, \dots, \beta_n + \gamma_n)$$

$$\therefore \langle \alpha, \beta + \gamma \rangle = \alpha_1 (\beta_1 + \gamma_1) + \dots + \alpha_n (\beta_n + \gamma_n)$$

$$= (\alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_n) + (\alpha_1 \gamma_1 + \dots + \alpha_n \gamma_n)$$

$$= \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \alpha, \gamma \rangle$$

$$4. c\alpha = (c\alpha_1, \dots, c\alpha_n)$$

$$\langle c\alpha, \beta \rangle = (c\alpha_1)\beta_1 + \dots + (c\alpha_n)\beta_n$$

$$= c(\alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_n)$$

$$= c\langle \alpha, \beta \rangle \quad \square$$

1.7 ประวัติของสมการเชิงอนุพันธ์

สมการเชิงอนุพันธ์เริ่มมีประวัติในคริสต์ศตวรรษที่ 17 โดยกลุ่มบุคคลแรกที่ศึกษาค้นคว้าอย่างจริงจังได้แก่ นิวตัน (Newton) ไบ์นิตซ์ (Leibnitz) และตระกูลแบร์นูลลี (Bernoulli) ปัญหาในรูปสมการเชิงอนุพันธ์สมัยนั้นเกิดจาก

การศึกษาเรขาคณิตและกลศาสตร์ เป็นสมการอันดับหนึ่ง และสอง มีลักษณะง่ายมีคำตอบเป็นฟังก์ชันเบื้องต้น (elementary functions) ที่เรารู้จักดี แก้ได้โดยใช้วิธีการทางพีชคณิต การใช้วิธีการประกอบฟังก์ชัน และการอินทิเกรต ซึ่งกระบวนการแก้ปัญหามีขั้นตอนจำกัด

ก่อนสิ้นศตวรรษที่ 17 มีวิธีอย่างใหม่ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ คือ วิธีแยกตัวแปรและการใช้ตัวประกอบเพื่ออินทิเกรต



ISAAC NEWTON (1642 – 1727)



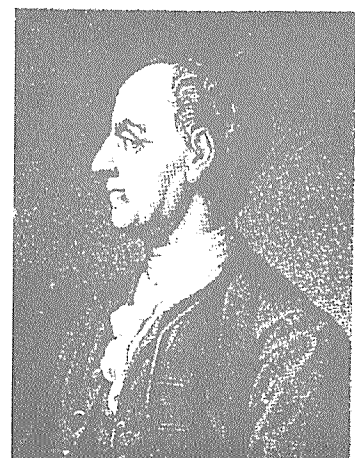
GOTTFRIED WILHELM LEIBNITZ
(1646 – 1716)



JACOB BERNOULLI
(1654 – 1705)

ในศตวรรษที่ 18 สมการเชิงอนุพันธ์เริ่มเข้ารูปเข้ารอยเป็นวิชาหนึ่ง และมีวิธีแก้ปัญหาเป็นระบบมากขึ้น นักคณิตศาสตร์ที่เริ่มใช้วิธีการเหล่านี้ได้แก่ ออยเลอร์ (Euler) ลากรองจ์ (Lagrange) และลาปลาซ (Laplace) ภายในศตวรรษนี้ นักคณิตศาสตร์ได้พบสมการเชิงอนุพันธ์มากมาย สมการเชิงอนุพันธ์ที่แก้โดยวิธีง่าย ๆ แต่ต้นมีน้อยมาก เมื่อเปรียบเทียบกับทั้งหมด นักคณิตศาสตร์เริ่มรู้สึกถึงความหวังที่จะได้วิธีการอย่างหนึ่งสำหรับใช้แก้สมการเชิงอนุพันธ์ใด ๆ

LEONHARD EULER (1707 – 1783)



ได้นั้น สูญสลายไป แต่เราได้พบความจริงยิ่งใหญ่ประการหนึ่งมาทดแทน คือ มีเกณฑ์ ตัดสินว่า สมการเชิงอนุพันธ์ใดมีคำตอบหรือไม่ เมื่อมาถึงจุดการแก้สมการโดยใช้อนุกรม นักคณิตศาสตร์ พยายามหาคุณสมบัติของคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์จากสมการเชิงอนุพันธ์โดยตรง และพบว่า สมการเชิงอนุพันธ์เราใช้เป็นต้นกำเนิดของฟังก์ชันใหม่ๆ ได้



JOSEPH LOUIS LAGRANGE
(1736 – 1813)



PIERRE SIMON LAPLACE
(1749 – 1827)

ในปี ค.ศ.1820 ซึ่งระยะนั้นเป็นระยะสำคัญในการวางทฤษฎีต่าง ๆ ของสมการเชิงอนุพันธ์ พร้อม ๆ กับการวางรากฐานแคลคูลัสให้รัดกุม โคชี (Cauchy) พบทฤษฎีบทการมีคำตอบ (Existence Theorem) ของสมการเชิงอนุพันธ์ โดยพิสูจน์ได้ว่า สมการอันดับ 1 ในรูป

$$y' = f(x, y)$$

มีคำตอบ เมื่อ $f(x, y)$ มีคุณสมบัติบางประการ ซึ่งต่อมา บีการ์ด (Picard) เสริมทฤษฎีบทนี้ให้สมบูรณ์ เป็นทฤษฎีบทการมีคำตอบหนึ่งเดียว (Existence and Uniqueness Theorem) โดยใช้วิธีการประมาณโดยลำดับชั้น



AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY
(1789 – 1857)

ปัจจุบันเราใช้สมการเชิงอนุพันธ์ แสดงกฎเกณฑ์ประการต่าง ๆ ในหลายวิชา เช่น ฟิสิกส์ เคมี ชีววิทยา และกลศาสตร์ สมการเชิงอนุพันธ์ยังเป็นเครื่องมือแก้ปัญหาได้กว้างขวาง ทางคณิตศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ ทางเศรษฐกิจ และวิทยาศาสตร์ประยุกต์

1.8 บทนิยามของสมการเชิงอนุพันธ์

ในหัวข้อนี้นอกจากจะได้ทราบลักษณะสมการเชิงอนุพันธ์แล้ว มีเรื่องอันดับ และดีกรีของสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งในการพิจารณาแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ เราทราบจากหัวข้อ 1.7 ว่า ไม่มีวิธีสากลที่ใช้แก้สมการเชิงอนุพันธ์ สมการเชิงอนุพันธ์แต่ละแบบจะมีวิธีการแก้เฉพาะแบบของมัน

บทนิยาม 1.8.1 สมการเชิงอนุพันธ์ หมายถึง สมการที่มีอนุพันธ์ต่าง ๆ ของฟังก์ชันไม่ทราบสูตร (unknown functions) หนึ่งฟังก์ชันหรือมากกว่าหนึ่งฟังก์ชันปรากฏอยู่

- หมายเหตุ
1. สมการใดที่สามารถจัดเป็นสมการในบทนิยาม 1.8.1 ได้ ถือเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ด้วย
 2. คำว่า differential equation (aequatio differentialis) เริ่มใช้โดยไลบ์นิตซ์ ในปี ค.ศ.1676

ตัวอย่าง 1.8.1 ต่อไปนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์

$$(1) \frac{dy}{dt} = -ky \quad (\text{Laws of Decay})$$

$$(2) 1 + (y')^2 + 2y y'' = 0 \quad (\text{ปัญหา Brachistochrone (shortest time)*})$$

$$(3) L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = E \omega \cos \omega t \quad (\text{Simple electric circuit})$$

$$(4) y = x \left(\frac{dy}{dx} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \quad (\text{Clairaut's equation})$$

$$(5) a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = Q(x)$$

$$(6) 2e^x dx + (7x + \sin y) dy = 0$$

$$(7) \frac{\partial z}{\partial x} = y$$

$$(8) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{Laplace's equation})$$

$$(9) x''(t) - x(t) + 5y'(t) = t$$

$$y''(t) - 4y(t) - 2x'(t) = -2$$

* เสนอโดย John Bernoulli ในปี ค.ศ.1696 หารูปร่างเส้นลวดที่ลูกปัดจะวิ่งลงไปตามเส้นลวดจากจุดสูงสุดถึงจุดต่ำสุดใช้เวลาน้อยที่สุด

1.8.2 สมการเชิงอนุพันธ์แบบธรรมดา

สมการเชิงอนุพันธ์แบบพาร์เชียล

บทนิยาม 1.8.2 ถ้าอนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการเชิงอนุพันธ์ใดเป็นพาร์เชียล

(partial derivatives) เรียกสมการนั้นว่า สมการเชิงอนุพันธ์แบบพาร์เชียล (partial differential equation)

ถ้าอนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการเชิงอนุพันธ์ใดเป็นแบบธรรมดา เรียกสมการนั้นว่า สมการเชิงอนุพันธ์แบบธรรมดา (ordinary differential equation)

ในที่นี้เราใช้คำว่า “ธรรมดา” เพื่อเน้นว่ามีใช้ “พาร์เชียล”

ตัวอย่าง 1.8.2 ในตัวอย่าง 1.8.1

ข้อ (1) – (6) และข้อ (9) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบธรรมดา

ข้อ (7) และ (8) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบพาร์เชียล

1.8.3 ตัวแปรอิสระ

ตัวแปรตาม

ในสมการเชิงอนุพันธ์มีอนุพันธ์ของตัวแปรใด เรียกตัวแปรนั้นว่า ตัวแปรตาม (dependent variable) เรียกตัวแปรอื่น ๆ ว่า ตัวแปรอิสระ (independent variable) ตามปกติตัวแปรตามจะเป็นฟังก์ชัน(ของตัวแปรอิสระ)ที่ไม่ทราบสูตรในสมการเชิงอนุพันธ์ เช่น

$$(1) \frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y = 0$$

มี x เป็นตัวแปรอิสระ

y เป็นตัวแปรตาม

$$(2) \frac{\partial z}{\partial x} = y$$

มี x, y เป็นตัวแปรอิสระ

z เป็นตัวแปรตาม

$$(3) 2xy \, dx + (x^2 - y^2)dy = 0$$

สมการนี้ สามารถเขียนเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ได้ 2 แบบ คือ ถ้าถือ x เป็นตัวแปรอิสระ (ซึ่ง $dx \neq 0$) จะเขียนได้เป็น

$$2xy + (x^2 - y^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

ทำนองเดียวกัน อาจถือว่า y เป็นตัวแปรอิสระ (ซึ่ง $dy \neq 0$) เขียนได้เป็น

$$2xy \frac{dy}{dx} + x^2 - y^2 = 0$$

ดังนั้น สมการสมการเชิงอนุพันธ์ (3) ในหัวข้อนี้ จะแทนสมการเชิงอนุพันธ์ได้ 2 แบบพร้อมกัน

1.8.4 อันดับ และดีกรีของสมการเชิงอนุพันธ์แบบธรรมดา

ในหนังสือเล่มนี้ เราจำกัควงศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์แบบธรรมดา จึงขอกล่าวถึงอันดับและดีกรีของสมการเชิงอนุพันธ์แบบธรรมดา

ใคร่ขอทบทวนเรื่องพหุนามก่อน ดังนี้

พหุนามของตัวแปร x ในที่นี้ หมายถึง ฟังก์ชันที่เขียนได้ในรูป

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \text{ โดย } a_n \neq 0, a_i \in \mathbb{R}, n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์}$$

จึงสังเกตว่า ตัวแปรที่ปรากฏอยู่ในแต่ละพจน์ยกกำลังเป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์

พหุนามหลายตัวแปรมีลักษณะเช่นเดียวกัน คือตัวแปรที่ปรากฏอยู่ในแต่ละพจน์

เมื่อจัดรูปเศษส่วน ต้องยกกำลังเป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ เช่น

$$f(x,y) = 4x^2y + 7x + 8y^3 \quad \text{เป็นพหุนามของ } x, y$$

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 3xy - 3 \quad \text{เป็นพหุนามของ } x,y \text{ และ } z \text{ แต่}$$

$$h(x,y) = 4x^2 + \frac{8x^3}{y} - 4 \quad \text{ไม่เป็นพหุนามเพราะเมื่อเขียนพจน์ที่สองเป็น } 8x^3y^{-1} \text{ จะได้}$$

ว่าตัวแปร y มีกำลังเป็น -1

ต่อไปเราพร้อมที่จะศึกษา อันดับและดีกรีของสมการเชิงอนุพันธ์แบบธรรมดา สมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n มีรูปทั่วไปเป็น

$$f(x,y,y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

บทนิยาม 1.8.4 สมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งสมการจัดรูปสมการเป็นสมการพหุนาม

(ซึ่งใช้ดีกรีต่ำสุด) ของตัวแปร $y', y'', \dots, y^{(n)}$ ได้ จะมีดีกรี และดีกรี

สูงสุดของ $y^{(n)}$ ที่ปรากฏจะเป็นดีกรีของสมการเชิงอนุพันธ์

ตัวอย่าง 1.8.4 พิจารณาอันดับและดีกรีของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$(1) \quad xy'' + 2y' + 3y^3 - 6e^x = 0 \quad \text{มีอันดับ 2 ดีกรี 1 (พิจารณาจาก } y'')$$

$$(2) \quad (y''')^2 - 2xy'y'' + (y)^4 = 0 \quad \text{มีอันดับ 3 ดีกรี 2 (พิจารณาจาก } y''')$$

$$(3) \quad \sqrt[3]{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \text{จัดให้อยู่ในรูปที่ง่ายที่สุดของพหุนามใน } y', y''$$

โดยการยกกำลัง 6 จะได้

$$(y'')^4 - (1 + y')^3 = 0 \quad \text{สมการนี้มีอันดับ 2 ดิกรี 4}$$

(ที่ทำให้เป็นเช่นนี้ เพราะการแก้สมการ (3) ต้องแก้สมการนี้)

(4) $\sin y' = y' + x + 3$ มีอันดับ 1 แต่ไม่มีดิกรี เพราะไม่สามารถจัดเป็นสมการพหุนามของ y' ได้

แบบฝึกหัด 1.8 (ก)

จงบอกอันดับและดิกรีของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $\frac{dy}{dx} = 5y + x + \sin y$

2. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{3x}{4y}$

3. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

4. $\frac{d^2y}{dx^2} = 3\frac{dy}{dx} + xy$

5. $\sqrt{\frac{d^2y}{dx^2}} = 3\frac{dy}{dx} + x$

6. $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4}$

7. $\frac{d^3y}{dx^3} = \sqrt{\frac{dy}{dx}}$

8. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{1}{3}} = k \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{5}{2}}$

คำตอบแบบฝึกหัด 1.8 (ก)

คำตอบ

1. 1, 1 2. 1, 2 3. 1, 6 4. 2, 1

5. 2, 1 6. 2, 2 7. 3, 2 8. 2, 2

1.8.5 คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์

คำตอบของสมการเงื่อนไข $x^2 + 3x - 4 = 0$ ได้แก่ 1, -4 เป็นจำนวนจริง แต่คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์จะเป็นฟังก์ชัน $f(x)$ บางฟังก์ชัน ซึ่งโดยทางทฤษฎี เราจะพิจารณาคำตอบในช่วงเปิด $\alpha < x < \beta$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\})$ ช่วงใดช่วงหนึ่ง

บทนิยาม 1.8.5 ฟังก์ชัน $y = y_0(x)$ จะเป็นคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์

$$f(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ก็ต่อเมื่อ ข้อความ

$$f(x, y_0(x), \dots, y_0^{(n)}(x)) = 0 \text{ เป็นจริงในบางช่วง } \alpha < x < \beta$$

ข้อสังเกต 1. เห็นชัดว่า คำตอบของสมการอันดับ n จำเป็นต้องมีอนุพันธ์ถึงอันดับที่ n ในช่วงนั้น

2. α อาจเป็น $-\infty$ และ β อาจเป็น ∞

3. สมการที่เป็นจริงทุกค่า x ในบางช่วงเรียกว่า เอกลักษณะ

ตัวอย่าง 1.8.5 คำตอบของสมการ $y'' - 3y' + 2y = 0$ ได้แก่

$$(1) y = 0$$

$$(2) y = e^x$$

$$(3) y = e^{2x}$$

$$(4) y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

แสดงได้ดังนี้

$$(1) y = 0 \text{ จะได้ } y' = 0 \text{ และ } y'' = 0 \text{ แทนค่าในสมการโจทย์ได้}$$

$$0 - 3(0) + 2(0) = 0 \text{ ซึ่งเป็นจริง}$$

$$(2) \text{ และ } (3) \text{ ให้เป็นแบบฝึกหัด}$$

$$(4) \text{ จาก } y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

$$\text{จะได้ } y' = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x}$$

$$\text{และ } y'' = c_1 e^x + 4c_2 e^{2x}$$

แทนค่าเหล่านี้ในโจทย์ได้

$$c_1 e^x + 4c_2 e^{2x} - 3(c_1 e^x + 2c_2 e^{2x}) + 2(c_1 e^x + c_2 e^{2x}) = 0$$

$$(c_1 e^x - 3c_1 e^x + 2c_1 e^x) + (4c_2 e^{2x} - 6c_2 e^{2x} + 2c_2 e^{2x}) = 0$$

เป็นจริงทุกค่า x

จงสังเกตว่า คำตอบข้อ (1) , (2) , (3) เป็นกรณีพิเศษของคำตอบ (4) เช่น คำตอบข้อ (1) เกิดจากการกำหนดค่า $c_1 = c_2 = 0$ ใน (4) และคำตอบ (2) เกิดจากการกำหนดค่า $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ ใน (4) และคำตอบ (3) เกิดจากการกำหนดค่า $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ ใน (4)

เรียกคำตอบ (1) , (2) , (3) , ว่า คำตอบเฉพาะ และคำตอบ (4) ซึ่งแทนคำตอบเฉพาะทั้งหมด (รวมคำตอบเฉพาะอื่น ๆ ด้วย) เรียกว่า คำตอบทั่วไป อนึ่งเรียก c_1 , c_2 ในคำตอบทั่วไปว่า ตัวคงค่าไม่เจาะจง (arbitrary constant) เราจะได้กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนตัวคงค่าไม่เจาะจงกับอันดับของสมการเชิงอนุพันธ์ในหัวข้อ 1.9.8

คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ อาจมีได้ถึง 3 ประเภท คือ

1. คำตอบทั่วไป (general solution) หมายถึง คำตอบที่มีตัวคงค่าไม่เจาะจง เป็นจำนวนเท่ากับ อันดับของสมการเชิงอนุพันธ์ แต่ละสมการเชิงอนุพันธ์มีคำตอบทั่วไป 1 คำตอบ
2. คำตอบเฉพาะ (particular solutions) หมายถึง คำตอบที่ไม่มีตัวคงค่าไม่เจาะจง แต่ได้จากคำตอบทั่วไป โดยการกำหนดค่าตัวคงค่าไม่เจาะจง ลงไปทุกตัว

3. คำตอบโดดเดี่ยว (singular solution) หมายถึง คำตอบที่ไม่มีตัวคงค่าไม่เจาะจงและไม่อาจได้จากคำตอบทั่วไปโดยการกำหนดค่าตัวคงค่าไม่เจาะจง คำตอบโดดเดี่ยวนี้นี้มีได้สำหรับทุกสมการเชิงอนุพันธ์ แต่มักเกิดในสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีดีกรีสูง ๆ เท่านั้น *

ตัวอย่าง 1.8.6 สำหรับสมการแคลโรต (Clairaut 's equation)

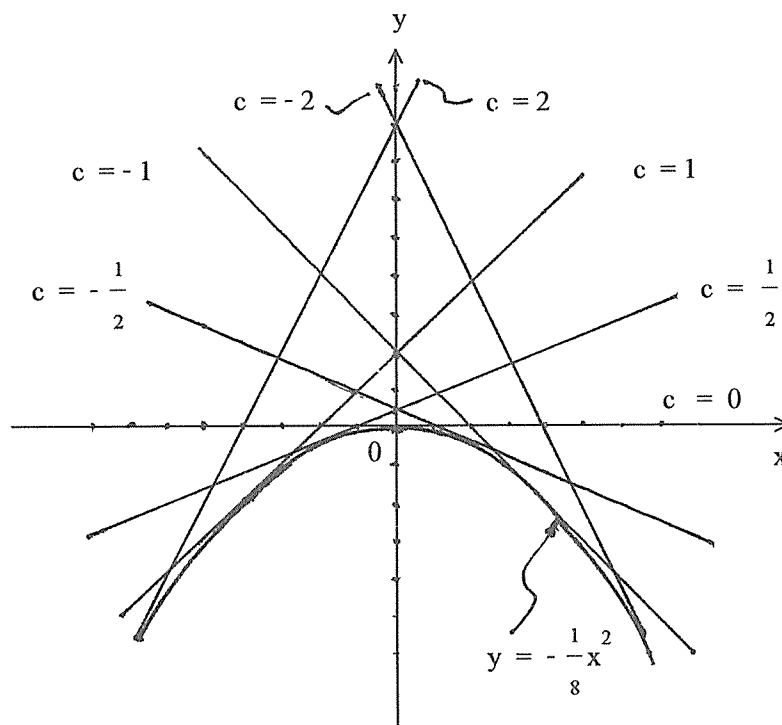
$$y = x\left(\frac{dy}{dx}\right) + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

คำตอบทั่วไป $y = cx + 2c^2$

คำตอบเฉพาะได้แก่	$y = 0$	โดยการกำหนด	$c = 0$
	$y = x + 2$	โดยการกำหนด	$c = 1$
	$y = -x + 2$	โดยการกำหนด	$c = -1$
	$y = 2x + 8$	โดยการกำหนด	$c = 2$
	$y = -2x + 8$	โดยการกำหนด	$c = -2$
	$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$	โดยการกำหนด	$c = \frac{1}{2}$
	$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$	โดยการกำหนด	$c = -\frac{1}{2}$

คำตอบเฉพาะดังกล่าวมีกราฟเป็นเส้นตรง ซึ่งเราเรียกว่า อินทิกรัลเฉพาะ (particular integrals)

ดังรูป



คำตอบโดดเดี่ยว คือ $y = -\frac{1}{8}x^2$

* ในบทที่ 2 จะหาคำตอบอีกประเภทหนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์ ที่เกิดจากการต่อกันระหว่างส่วนของกราฟของคำตอบเฉพาะและคำตอบโดดเดี่ยว แต่ขณะนี้ยังไม่พบบทบาทสำคัญในการประยุกต์ใช้

จงสังเกตว่า ในตัวอย่างนี้คำตอบโคจรเดียวมีสมการกำลังสอง มิใช่สมการเชิงเส้นเหมือนกับคำตอบทั่วไป หนึ่งกราฟของคำตอบโคจรเดียวคล้ายกับจะทำหน้าที่กั้นมิให้กราฟของคำตอบเฉพาะตัวอื่นเข้าไปในบริเวณหนึ่ง โดยนัยนี้คำตอบโคจรเดียวจึงมีอีกชื่อหนึ่งว่า ขอบหุ้ม (envelope)

แบบฝึกหัด 1.8 (ข) จงแสดงว่า สมการซ้ายมือของแต่ละข้อเป็นคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์

ในบรรทัดเดียวกัน

$$1. y = x^2 + x + c, y' = 2x + 1$$

$$2. y = x^2 + cx, xy' = x^2 + y$$

$$3. y = c, y' = 0$$

$$4. y = A \sin 5x + B \cos 5x, y'' + 25y = 0$$

$$5. y = c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x + 9x^2 - 2, y'' + 9y = 81x^2$$

$$6. y = (x+c)e^{-x}, y' + y = e^{-x}$$

$$7. x = 2t + c, y = ct + 3, 2(y')^2 - xy' = 3 - y \text{ (ข้อแนะ : กำจัด } t \text{ ก่อน)}$$

8. คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ในรูป $y = f(x, c_1, \dots, c_n)$ เรียกว่า รูปแบบ

คำตอบแบบชัดแจ้ง (explicit form) บางครั้งอาจเขียนคำตอบในรูปไม่ชัดแจ้ง (implicit form)

$g(x, y, c_1, \dots, c_n) = 0$ เป็นคำตอบแบบไม่ชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์ (A) ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชัน

$y = y(x)$ อย่างน้อย 1 ฟังก์ชันจาก $g(x, y, c_1, \dots, c_n) = 0$ ที่สอดคล้องสมการเชิงอนุพันธ์ (A) และ

ฟังก์ชันอื่น ๆ $y = y_2(x)$ จาก $g(x, y, c_1, \dots, c_n) = 0$ ต้องสอดคล้องกับ (A) ด้วย จงแสดงว่าความสัมพันธ์ซ้ายมือเป็นคำตอบรูปไม่ชัดแจ้งของสมการขวามือ

$$x^2 + y^2 = c, y' = -\frac{x}{y}$$

1.9 ทฤษฎีบทการมีคำตอบหนึ่งเดียว (Existence and Uniqueness Theorem)

ทฤษฎีบท 1.9.1 (สำหรับสมการอันดับ 1)

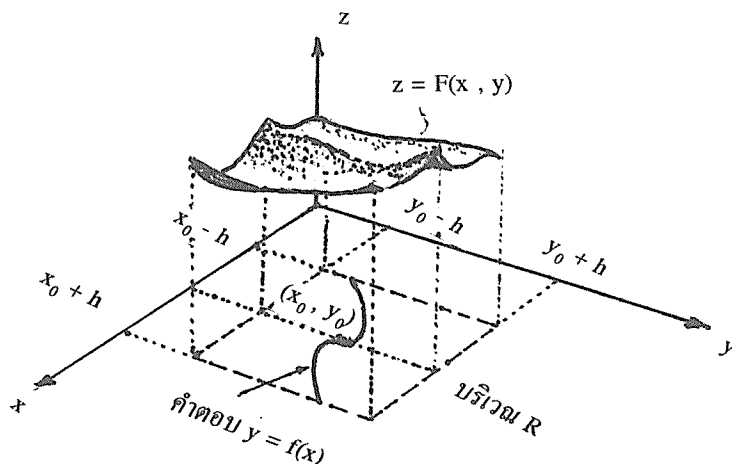
กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \quad \text{และจุด } (x_0, y_0)$$

ถ้า $F, \frac{\partial F}{\partial y}$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องในบริเวณสี่เหลี่ยม $R: |x - x_0| < h, |y - y_0| < h,$

แล้วจะมีคำตอบ $y = f(x)$ เพียงคำตอบเดียวที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์นี้ที่ผ่านจุด

(x_0, y_0) (นั่นคือ เมื่อ $x = x_0$ ได้ $y = y_0$)



ทฤษฎีบท 1.9.2 (สำหรับสมการอันดับ n)

กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \text{ และเงื่อนไขเริ่มต้น (initial value)* ดังนี้}$$

$$\text{เมื่อ } x = x_0 \text{ ได้ } y = y_0, y' = y_0', \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$$

$$\text{โดย } x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)} \text{ เป็นจำนวนจริงคงค่า}$$

ถ้า F และอนุพันธ์ย่อยของ F เทียบกับ $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ ต่างเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในบริเวณ $R: |x - x_0| < h, |y - y_0| < h, \dots, |y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}| < h$ แล้วจะมีคำตอบ $y = f(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์นี้ เพียงคำตอบเดียวที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้นนั้น

สำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบทการมีคำตอบหนึ่งเดียวอันดับหนึ่ง ดูภาคผนวก

ทฤษฎีบทการมีคำตอบหนึ่งเดียวทำให้ได้ข้อเท็จจริงเกี่ยวกับคำตอบทั่วไป ดังบทแทรกในหน้า 20 เพื่อเป็นการปูพื้นความเข้าใจบทแทรก ให้อ่านหมายเหตุต่อไปนี้

หมายเหตุ การกำหนดคำตอบเฉพาะจากคำตอบทั่วไป อาจกำหนดโดยใช้เงื่อนไขเริ่มต้น ดังต่อไปนี้
หาอนุพันธ์ของคำตอบทั่วไป $(n-1)$ ครั้งจะได้สมการ $(n-1)$ สมการ ถ้ารวมทั้งสมการคำตอบทั่วไปด้วยจะได้ n สมการ แทนค่าเงื่อนไขเริ่มต้นในสมการทั้ง n สมการ จะได้สมการที่มีตัวคงค่าไม่เจาะจง จากนั้นแก้สมการหาค่าตัวคงค่าไม่เจาะจง และนำไปแทนในสมการคำตอบทั่วไป จะได้คำตอบเฉพาะ เช่น

$$\text{สมการ } y'' = 0 \text{ มีคำตอบทั่วไปเป็น } y = c_1 x + c_2$$

$$\text{กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นเป็น } y = y_0, y' = y_0' \text{ เมื่อ } x = x_0' \text{ จะหาคำตอบเฉพาะได้ดังนี้}$$

* คำว่าเงื่อนไขเริ่มต้น (initial value) เกิดในวิชากลศาสตร์ ซึ่งกล่าวถึงค่าแสดงตำแหน่ง และความเร็วของวัตถุ ณ เวลาต้น t_0 เวลาหนึ่ง รายละเอียดของคำนี้ศึกษาได้อีกในหัวข้อ 2.3

จาก $y = c_1 x + c_2$

หาอนุพันธ์จะได้ $y' = c_1$

แทนค่าเงื่อนไขต้น ในสมการสุดท้ายทั้งสองจะได้

$$y_0 = c_1 x_0 + c_2$$

$$y_0' = c_1$$

แก้สมการทั้งสองหาค่า c_1, c_2 จะได้ $c_2 = y_0 - y_0' x_0$

แทนค่า c_1, c_2 ในคำตอบทั่วไปจะได้

$$y = y_0' x + (y_0 - y_0' x_0) \text{ เป็นคำตอบเฉพาะ}$$

วิธีการดังกล่าวเราอาจจะใช้ตรวจสอบว่าคำตอบที่มีตัวคงค่าไม่เจาะจงเป็นคำตอบทั่วไป

หรือไม่ได้ด้วย เช่น เราต้องการตรวจสอบ $y = c_1 \sin x + \cos x$ เป็นคำตอบทั่วไปของ $y'' + y = 0$ หรือไม่ ทำดังนี้

ถ้า $y = c_1 \sin x + \cos x$ เป็นคำตอบทั่วไป

ดังนั้น $y' = c_1 \cos x - \sin x$

แทนค่าเงื่อนไขต้น $x = x_0, y = y_0, y' = y_0'$ ในสมการสุดท้ายทั้งสองจะได้

$$y_0 = c_1 \sin x_0 + \cos x_0 \quad \text{ดังนั้น} \quad c_1 = \frac{y_0 - \cos x_0}{\sin x_0}$$

$$y_0' = c_1 \cos x_0 - \sin x_0 \quad \text{ดังนั้น} \quad c_1 = \frac{y_0' + \sin x_0}{\cos x_0}$$

จะเห็นว่า c_1 ที่ได้ไม่เท่ากัน จึงไม่มี c_1 ที่สอดคล้องทั้งสองสมการ

ดังนั้น ไม่มีคำตอบเฉพาะที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต้น จึงขัดแย้งกับทฤษฎีบทการมีคำตอบหนึ่ง

เดียว ดังนั้น $y = c_1 \sin x + \cos x$ ไม่ใช่คำตอบทั่วไป

บทแทรก คำตอบทั่วไป (ถ้ามี) ของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n จะมีตัวคงค่าไม่เจาะจง n ตัว

พิสูจน์ ให้คำตอบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n มีตัวคงค่าไม่เจาะจง m ตัว

กำหนดเงื่อนไขต้น ในรูปทั่วไป* ดังนี้

$$\text{เมื่อ } x = x_0 \text{ ได้ } y = y_0, y' = y_0', \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$$

โดยการหาอนุพันธ์ของคำตอบทั่วไป $n-1$ ครั้ง แล้วแทนค่าเงื่อนไขต้นในคำตอบทั่วไป

* $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ เป็นค่าใด ๆ

และอนุพันธ์ต่าง ๆ $n-1$ อันดับข้างต้น จะได้สมการที่มีตัวคงค่าไม่เจาะจง m ตัวเหล่านั้นปรากฏอยู่ จำนวน n สมการ

ถ้า $m > n$ คำตอบสำหรับ c_i จะมีได้หลายชุดทำให้ได้คำตอบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต้นดังกล่าวหลายคำตอบ ขัดแย้งกับทฤษฎีบทการมีคำตอบหนึ่งเดียว

ถ้า $m < n$ จำนวนตัวไม่ทราบค่าน้อยกว่าจำนวนสมการ จะไม่มีคำตอบสำหรับ c_i จึงไม่มีคำตอบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต้น ขัดแย้งกับทฤษฎีบทการมีคำตอบหนึ่งเดียว

ดังนั้น $m = n$ นั่นคือ คำตอบทั่วไปของสมการอันดับ n ต้องมีตัวคงค่าไม่เจาะจงจำนวน n ตัว $\square$

แบบฝึกหัด 1.9

1. จงแสดงว่า $y = cx$ เป็นคำตอบทั่วไปของ $y' = y/x$ จงแสดงเหตุผลว่าเหตุใดเส้น $y = cx$ หลายเส้นผ่านจุด $(0,0)$ ได้ โดยไม่ขัดกับทฤษฎีบทการมีคำตอบหนึ่งเดียว

พิจารณารูปสมการในข้อ 2, 3 ต่อไปนี้ จงหาบริเวณที่สมการมีคำตอบ

$$2. y' = \frac{x}{(x-1)y}$$

$$3. y' = \frac{\sqrt{4-y^2}}{y}$$

4. (ประยุกต์ คาราศาสตร์) กาเมรอน (A.G.W. Cameron) เขียนบทความหนึ่งเกี่ยวกับกระบวนการเพิ่มสะสมของเนบิวลาดั้งเดิมของดวงอาทิตย์ [Icarus, 18(1973), 407-450] และในบทความนี้ได้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 ดังต่อไปนี้

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ax^{5/6}}{(b-Bt)^{3/2}}$$

เมื่อ a, b และ B เป็นตัวคงค่า จงหาจุด (t_0, x_0) ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์นี้จะมีคำตอบหนึ่งเดียวผ่านจุดนั้น

คำตอบแบบฝึกหัด 1.9

$$1. \because \text{ ณ } (0, 0) \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x} \text{ ไม่ต่อเนื่อง}$$

$$2. \text{ บริเวณซึ่ง } x \neq 1, y \neq 0$$

$$3. \text{ บริเวณซึ่ง } y \leq -2 \text{ หรือ } y \geq 2$$

$$4. \text{ บริเวณซึ่ง } t < \frac{b}{B}, x > 0$$

1.10 การกำจัดตัวคงค่าไม่เจาะจง

มีบางปัญหาที่เกิดขึ้นในวิชาคณิตศาสตร์ และฟิสิกส์ ซึ่งในปัญหานั้นมีข้อมูลที่กำหนดในรูปสมการที่มีตัวคงค่าไม่เจาะจง เราต้องการศึกษาลักษณะหรือความสัมพันธ์บางประการที่เกี่ยวข้อง ในกรณีนี้เราอาจต้องสร้างสมการเชิงอนุพันธ์จากปัญหานั้น และใช้ความรู้เกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์ในการอธิบายความสัมพันธ์ดังกล่าว ตัวอย่างประการหนึ่ง คือ การหาทราเจกทอรีมุมฉากของชุดเส้นโค้งที่กำหนดให้ เป็นต้น

บทนิยาม 1.10.1 การกำจัดตัวคงค่าไม่เจาะจง คือ การสร้างสมการเงื่อนไขอันหนึ่ง ซึ่งเป็นผลสรุปจากสมการเดิม และสมการใหม่นั้น ไม่มีตัวคงค่าไม่เจาะจงที่ต้องกำจัด

หลักการ ตามหลักในวิชาพีชคณิตของการกำจัดตัวแปร

ถ้ามี 2 สมการ กำจัดได้ 1 ตัว

ถ้ามี 3 สมการ กำจัดได้ 2 ตัว

ถ้ามี $n+1$ สมการ กำจัดได้ n ตัว

ตัวอย่าง การกำจัด x จาก

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

ทำดังนี้ : จาก (1) เราได้ $x = \frac{c_1 - b_1y}{a_1}$ แทนค่าใน (2)

$$a_2\left(\frac{c_1 - b_1y}{a_1}\right) + b_2y - c_2 = 0$$

$$\text{หรือ } a_2c_1 - a_2b_1y + a_1b_2y - a_1c_2 = 0$$

ในการหาสมการกำจัดตัวคงค่าไม่เจาะจง ใช้หลักการเดียวกับหลักการดังกล่าวข้างต้น กล่าวคือถ้าต้องการกำจัดตัวคงค่าไม่เจาะจง n ตัว ต้องสร้างระบบสมการที่ไม่ขัดแย้งกัน จำนวน $n+1$ สมการ แล้วจึงกำจัดโดยวิธีทางพีชคณิต แต่ข้อมูลที่กำหนดให้สมการเดียว เราต้องสร้างอีก n สมการที่ไม่ขัดแย้งกับสมการเดิม แนวทางหนึ่งคือการหาอนุพันธ์ของสมการเดิม n ครั้ง จะได้ครบ $n+1$ สมการ

อนึ่ง เมื่อกำจัดตัวคงค่าไม่เจาะจงแล้ว สมการใหม่ที่ได้จะเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n

ตัวอย่าง 1.10.1 จงกำจัด c_1, c_2 จากสมการ

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} \quad \dots\dots\dots (1)$$

วิธีทำ เราหาอนุพันธ์เทียบกับ x สองครั้ง จะได้

$$y' = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{และ } y'' = c_1 e^x + 4c_2 e^{2x} \quad \dots\dots\dots (3)$$

การกำจัด c_1, c_2

วิธี 1 แก้โดยวิธีแทนค่า

$$(2) - (1) ; y' - y = c_2 e^{2x}$$

$$2(1) - (2) ; 2y - y' = c_1 e^x$$

แทนค่าเหล่านี้ในสมการ (3) เราได้

$$y'' = (2y - y') + 4(y' - y)$$

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

วิธี 2 ระบบสมการอันประกอบด้วย (1) , (2) , (3) จะมีคำตอบสำหรับ c_1, c_2 ก็ต่อเมื่อค่าลำดับชั้น (rank) ของเมทริกซ์เสริม (augmented matrix) เท่ากับค่าลำดับชั้นของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ (coefficient matrix) ดังนั้น

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} e^x & e^{2x} & y \\ e^x & 2e^{2x} & y' \\ e^x & 4e^{2x} & y'' \end{array} \right| = 0 \\ \\ \text{หรือ} \quad \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & y \\ 1 & 2 & y' \\ 1 & 4 & y'' \end{array} \right| = 0 \\ \\ \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & y \\ 1 & 2 & y' \\ 1 & 4 & y'' \end{array} \right| = 0 \quad \text{หรือ} \quad 2y - 3y' + y'' = 0 \end{array}$$

เรียกดีเทอร์มิแนนต์ ในบรรทัดสุดท้ายว่า ดีเทอร์มิแนนต์กำจัด (eliminant) จงสังเกตว่า จำนวนข้างหน้า y, y', y'' ในดีเทอร์มิแนนต์กำจัดเป็นสัมประสิทธิ์ของ $c_1 e^x, c_2 e^{2x}$ ของสมการ (1) , (2) , (3) ตามลำดับ

วิธี 2 นี้ มีข้อจำกัดการใช้คือ สมการที่กำหนดให้เดิมนั้นต้องอยู่ในรูป

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \dots + c_n e^{m_n x}$$

ตัวอย่าง 1.10.2 จงกำจัด c_1, c_2, c_3 จากสมการ

$$y = c_1 + c_1 e^x + c_3 e^{-2x}$$

วิธีทำ จาก

$$y = c_1 + c_1 e^x + c_3 e^{-2x}$$

เราได้

$$y' = 0 + c_1 e^x - 2c_3 e^{-2x}$$

$$y'' = 0 + c_1 e^x + 4c_3 e^{-2x}$$

$$y''' = 0 + c_1 e^x - 8c_3 e^{-2x}$$

ดังนั้น

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & -2 & y' \\ 0 & 1 & 4 & y'' \\ 0 & 1 & -8 & y''' \end{vmatrix} = 0$$

$$6y''' + 6y'' - 12y' = 0$$

$$\text{หรือ} \quad y''' + y'' - 2y' = 0$$

ตัวอย่าง 1.10.3 จงกำจัด α, β จากสมการ

$$x = \beta \sin(\omega t + \alpha) \quad (\text{simple harmonic waves})$$

ซึ่งจะใช้ ω เป็นพารามิเตอร์ของสมการเชิงอนุพันธ์ (ไม่ต้องกำจัด)

วิธีทำ จากสมการ $x = \beta \sin(\omega t + \alpha)$ (1)

หาอนุพันธ์เทียบกับ t ได้

$$\frac{dx}{dt} = \omega \beta \cos(\omega t + \alpha) \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 \beta \sin(\omega t + \alpha) \quad \dots\dots\dots (3)$$

แทนค่า (1) ใน (3) เราได้สมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

ตัวอย่าง 1.10.4 จงสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ของวงกลมทั้งหมดที่มีจุดศูนย์กลางอยู่บนแกน x และสัมผัสแกน y

วิธีทำ เราได้สมการวงกลม คือ

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2$$

$$\text{หรือ } x^2 - 2rx + y^2 = 0 \dots\dots\dots (1)$$

กำจัด r โดยหาอนุพันธ์เทียบกับ x

$$2x - 2r + 2y y' = 0$$

ดังนั้น $r = x + y y'$ แทนค่านี้ใน (1)

$$x^2 - 2(x + y y')x + y^2 = 0$$

$$y^2 - x^2 - 2xy y' = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

ตัวอย่าง 1.10.5 จงสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ จากสมการ

$$y = Ax^3 + Bx \dots\dots\dots (1)$$

วิธีทำ หาอนุพันธ์เทียบกับ x สองครั้งเราได้

$$y' = 3Ax^2 + B \dots\dots\dots (2)$$

$$y'' = 6Ax \dots\dots\dots (3)$$

$$2(2) - x(3); \quad 2y' - xy'' = 2B \dots\dots\dots (4)$$

$$6(1); \quad 6y = 6Ax^3 + 6Bx \dots\dots\dots (5)$$

แทนค่า (3) , (4) ใน (5)

$$6y = x^2 y'' + 3x(2y' - xy'')$$

$$x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0$$

หมายเหตุ จากสมการ $y = Ax^3 + Bx$ เราหาอนุพันธ์เทียบกับ x ติดต่อกัน 4 ครั้ง เราได้

$$y^{(4)} = 0$$

แต่สมการนี้ มิใช่สมการเชิงอนุพันธ์ของ $y = Ax^3 + Bx$ เพราะ $y^{(4)} = 0$

มีคำตอบทั่วไปเป็น $y = c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4$ ซึ่งกว้างกว่าสมการ

$$y = Ax^3 + Bx$$

แบบฝึกหัด 1.10

จงกำจัดตัวคงค่าไม่เจาะจงจากสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $y \sin x - xy^2 = c$

2. $x^2 y = 1 + cx$

3. $x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$, เมื่อ ω เป็นพารามิเตอร์

4. $y = cx + c^2 + 1$

5. $y = mx + \frac{h}{m}$; เมื่อ h เป็นพารามิเตอร์

6. $y = ax^2 + bx + c$

7. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$

8. $y = x + c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$

9. $y = c_1 e^{2x} \cos 3x + c_2 e^{2x} \sin 3x$

10. $y = c_1 x^2 + c_2 e^{2x}$

คำตอบแบบฝึกหัด 1.10

1. $y(\cos x - y)dx + (\sin x - 2xy)dy = 0$

2. $(x^2 y + 1)dx + x^3 dy = 0$

3. $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

4. $y = xy' + (y')^2 + 1$

5. $y = xy' + \frac{h}{y'}$

6. $y''' = 0$

7. $y'' + 4y' + 3y = 0$

8. $y'' + 4y' + 3y = 4 + 3x$

9. $y'' - 4y' + 13y = 0$

10. $x(1-x)y'' + (2x^2 - 1)y' - 2(2x-1)y = 0$

บทที่ 2

การแก้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 ดีกรี 1

2.1 รูปสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 ดีกรี 1

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 ดีกรี 1 ในรูปพหุนามของ $\frac{dy}{dx}$ คือ

$$\frac{dy}{dx} - f(x, y) = 0$$

เราอาจเขียนสมการนี้ในรูปอื่นได้อีก เช่น

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{หรือ } M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

ตัวอย่าง 2.1.1 เขียนสมการใหม่ โดยใช้รูป (2) ดังต่อไปนี้

$$1. \frac{dy}{dx} = 5x^2 + y \text{ เป็น } (5x^2 + y)dx - dy = 0$$

$$\text{จะได้ } M(x, y) = 5x^2 + y \text{ และ } N(x, y) = -1$$

$$2. \frac{dy}{dx} = -\frac{xy(1+y^2)}{1-x^2} \text{ เป็น } xy(1+y^2)dx + (1-x^2)dy = 0$$

$$\text{จะได้ } M(x, y) = xy(1+y^2) \text{ และ } N(x, y) = 1-x^2$$

2.2 สมการแบบ $\frac{dy}{dx} = f(x)$

เมื่อ $f(x)$ ต่อเนื่อง ณ บางช่วง $a < x < b$

$$\text{สมการ } \frac{dy}{dx} = f(x)$$

ซึ่งจัดรูปได้เป็น $dy = f(x)dx$

จะมีคำตอบรูปทั่วไป คือ $y = \int f(x)dx$

ตัวอย่าง 2.2.1 จงแก้สมการ $\frac{dy}{dx} = x^2 - \frac{1}{x^2}$

วิธีทำ คำตอบทั่วไปคือ $y = \int (x^2 - \frac{1}{x^2})dx$

หรือ $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + c$

ตัวอย่าง 2.2.2 จงแก้สมการ $\frac{dy}{dx} = x^4 e^x$

วิธีทำ คำตอบทั่วไป คือ $y = \int x^4 e^x dx$

หรือ $y = x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12x^2 e^x - 24x e^x + 24e^x - 24e^x + c$

ตัวอย่าง 2.2.3 จงแก้สมการ $\frac{dy}{dx} = e^{-x^2}$

วิธีทำ คำตอบทั่วไป คือ $y = \int e^{-x^2} dx$

หมายเหตุ เนื่องจากอินทิกรัล $\int e^{-x^2} dx$ มิใช่อินทิกรัลเบื้องต้น (non-elementary integral) กล่าวคือไม่สามารถหาค่าอินทิกรัลด้วยเทคนิคเบื้องต้นในแคลคูลัสได้ ดังนั้นเราจะคงเครื่องหมายอินทิกรัลไว้ อินทิกรัลที่มีอินทิกรัลเบื้องต้นได้แก่

$$\begin{aligned} &\int e^{-x^2} dx, \int \frac{e^{-x}}{x} dx, \int \frac{dx}{\ln x}, \\ &\int x \tan x dx, \int x \sec x dx, \\ &\int \sqrt{4-x^3} dx, \int \sqrt{1-x^5} dx, \\ &\int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx, \int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{\cos x}{x} dx \quad \text{ เป็นต้น} \end{aligned}$$

2.3 สมการแบบแยกตัวแปรได้

บทนิยาม 2.3.1 ถ้าสามารถจัดสมการเชิงอนุพันธ์ได้ในรูป

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

เราเรียกสมการเชิงอนุพันธ์นี้ว่า สมการแบบแยกตัวแปรได้
(variable separable)

ตัวอย่างสมการแบบแยกตัวแปรได้ ได้แก่ $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$

เพราะเมื่อคูณตลอดด้วย $\frac{1}{g_1(y)f_2(x)}$ จะได้

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0$$

ในการหาคำตอบของสมการแบบแยกตัวแปรได้ เราให้ $y = y(x)$ เป็นคำตอบ ดังนั้น จากรูปซึ่งจัดแยกตัวแปรแล้ว

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

เราจัดได้เป็น

$$f(x)dx + g(y(x))\frac{dy}{dx}dx = 0$$

อินทิเกรตเทียบกับ x ,

$$\int f(x)dx + \int g(y(x))y'(x)dx = c$$

ซึ่งเหมือนกับ

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C$$

ข้อสังเกต การหาค่า $\int g(y)dy$ เป็นการอินทิเกรตเทียบกับ y ซึ่งเราย่อมทำได้
เป็นรูปสำเร็จเพราะเราทราบ $g(y)$ ส่วน $\int g(y(x))y'(x)dx$ นั้นเราไม่สามารถ
หาค่าได้เพราะยังไม่ทราบ $y(x)$ โชคดีที่ $\int g(y(x))y'(x)dx = \int g(y)dy + c$

ตัวอย่าง 2.3.1 จงหาคำตอบทั่วไปของ

$$1. (x + 1)dx + xy \, dy = 0$$

$$2. \frac{dy}{dx} = e^{x-y}$$

วิธีทำ 1. จัดรูปสมการได้เป็น $(1 + \frac{1}{x})dx + y \, dy = 0$

$$\text{คำตอบคือ } \int (1 + \frac{1}{x})dx + \int y \, dy = c$$

$$\text{หรือ } x + \ln |x| + \frac{y^2}{2} = C$$

$$2. \text{ จัดรูปสมการได้เป็น } \frac{dy}{dx} = e^x \cdot e^{-y}$$

$$\text{หรือ } e^y \, dy = e^x \, dx$$

$$\text{คำตอบคือ } e^y = e^x + c$$

ตัวอย่าง 2.3.2 จงหาคำตอบทั่วไป และคำตอบเฉพาะซึ่งผ่านจุด (0,0) ของ

$$e^x \cos y \, dx + (1 + e^x) \sin y \, dy = 0$$

$$\text{วิธีทำ จัดรูปสมการได้เป็น } \frac{e^x dx}{1+e^x} + \frac{\sin y}{\cos y} dy = 0$$

$$\text{หาคำตอบทั่วไป } \ln(1 + e^x) - \ln |\cos y| = c$$

$$\ln \frac{(1+e^x)}{|\cos y|} = c$$

$$1 + e^x = \pm e^c \cos y$$

$$\text{สรุปรูปคำตอบทั่วไป } 1 + e^x = C \cos y, \quad C \neq 0$$

$$\text{คำตอบนี้ ผ่านจุด (0,0) ก็ต่อเมื่อ } 1 + e^0 = C \cos 0$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } C = 2$$

$$\text{ดังนั้น คำตอบเฉพาะที่ผ่านจุด (0, 0) คือ } 1 + e^x = 2 \cos y$$

ข้อกำหนด เรียกเงื่อนไข “ผ่านจุด (0, 0)” ในตัวอย่าง 2.3.2 ว่า เงื่อนไขต้น (initial condition) และเรียกสมการที่มีเงื่อนไขต้นว่า ปัญหาค่าเริ่มต้น (initial-valued problem) เงื่อนไขต้นนี้ อาจเขียนได้หลายลักษณะเช่น

$$1. \text{ ผ่านจุด (0,0)}$$

$$\text{หรือ } 2. \text{ เมื่อ } x = 0 \text{ ได้ } y = 0$$

หรือ 3. $y(0) = 0$ เป็นต้น

อนึ่ง โดยทั่วไปสมการเชิงอนุพันธ์ อันดับที่ n มีเงื่อนไขต้น ในรูป

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

เป็นการกำหนดค่า y และอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ของ y ณ $x = x_0$ ค่าหนึ่ง แต่ถ้าเป็นการกำหนดเงื่อนไข ณ ค่า 2 ค่าของตัวแปรอิสระ x เรียกเงื่อนไขนี้ว่า เงื่อนไขค่าขอบ (boundary condition) และเรียกสมการเชิงอนุพันธ์ พร้อมเงื่อนไขค่าขอบว่า ปัญหาค่าขอบ (boundary-valued problem)

แบบฝึกหัด 2.3

จงแก้สมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$1. 3x(y^2 + 1)dx + y(x^2 + 2)dy = 0$$

$$2. r \frac{d\phi}{dr} = \phi^2 + 1$$

$$3. x\sqrt{1+y^2} dx = y\sqrt{1+x^2} dy$$

$$4. y' = 8xy + 3y$$

$$5. y^3 dx + (x^3 y^2 + x^3) dy = 0$$

$$6. \sin^2 y dx + \cos^2 x dy = 0; y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$7. 2y \cos x dx + 3 \sin x dy = 0; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

$$8. y' = xe^{y-x^2}; \text{ เมื่อ } x = 0, y = 0$$

9. ก. จงแสดงว่าสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งไม่ใช่แบบแยกตัวแปรได้ที่อยู่ในรูป

$$H(x) + yG(xy)dx + xG(xy)dy = 0 \text{ จะเปลี่ยนเป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้}$$

(ซึ่งมี v เป็นตัวแปรตามแทน y) โดยให้ $v = xy$

ข. จงใช้ความรู้ในข้อ ก. แก้สมการ $(x^2 + y \sin xy)dx + x \sin xy dy = 0$

10. ในปี ค.ศ.1930 เฮอร์สโตน (L.L. Thurstone) ได้สมการเชิงอนุพันธ์ แสดงสถานะ (state) ของผู้เรียนขณะกำลังศึกษาความรู้หรือทำงาน ถ้าให้ปริมาณ $y(t)$ แทนสถานะการเรียนรู้ของผู้เรียน ณ เวลา t จะได้สมการเฮอร์สโตนเป็นสมการแบบแยกตัวแปร ได้ดังนี้

$$\frac{dy}{y^{\frac{3}{2}}(1-y)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2k}{\sqrt{m}} dt$$

เมื่อ k และ m เป็นตัวคงค่าบวกซึ่งขึ้นอยู่กับสมรรถภาพการเรียนรู้ของผู้เรียน และความซับซ้อนของงานตามลำดับ จงแก้สมการเฮอร์สโตนนี้ (ข้อแนะ แทนค่า $y = \sin^2 \theta$)

11. วิโต โวลแตร์รา (Vito Volterra) เขียนในบทความ Leçons sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie (Gauthier-Villars, Paris, 1931) และสรุปสมการเชิงอนุพันธ์ในรูป

$$\frac{dx}{dt} = x(a_1 + a_2 y)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(b_1 + b_2 x)$$

เป็นโมเดลทางคณิตศาสตร์ แสดงการแข่งขันแย่งชิงอาหาร และแสงแดดของพืชสองพรรณ (species) ซึ่งเกิดร่วมกันในสิ่งแวดล้อมหนึ่งที่กำหนดให้ โดยใช้กฎลูกโซ่ คือ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$$

เราได้สมการแยกตัวแปรได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(b_1 + b_2 x)}{x(a_1 + a_2 y)}$$

จงแก้สมการเชิงอนุพันธ์นี้

คำตอบแบบฝึกหัด 2.3

1. $(x+2)^2 (y+1)^3 = c$

2. $\ln r - \tan^{-1} \phi = c$

3. $\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+y^2} = c$

4. $y = c e^{4x^2+3x}$

5. $x^{-2} - y^2 - 2 \ln |y| = c$

6. $\tan x \tan y = 1$

7. $y^3 \sin x = 8$

8. $2e^{-y} = 1 + e^{-x^2}$

9. $x^3 - 3 \cos xy = c$

10. $\frac{2y-1}{\sqrt{y}\sqrt{1-y}} = \frac{k}{\sqrt{m}} t + c$

11. $y^{a_1} e^{a_2 y} = c x^{b_1} e^{b_2 x}$

2.4 สมการสัมประสิทธิ์เอกพันธ์

ในหัวข้อนี้เริ่มต้นทบทวน “ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันเอกพันธ์ 2 ตัวแปร” แล้วศึกษาเครื่องมือแก้สมการ ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ (homogeneous functions) อันได้แก่ ทฤษฎีบท 2.4.1

บทนิยาม 2.4.1 ฟังก์ชัน $f(x, y)$ จะเป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง k ซึ่ง

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y) \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } t > 0 \text{ เรียก } k$$

ว่า ดีกรีของความเป็นเอกพันธ์ (degree of homogeneity) ของ f

ตัวอย่าง 2.4.1 พิจารณา $f(x, y) = x^2 + xy - 2y^2$

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= (tx)^2 + (tx)(ty) - 2(ty)^2 \\ &= t^2 x^2 + t^2 xy - t^2 (2y^2) \\ &= t^2 (x^2 + xy - 2y^2) \\ &= t^2 f(x, y) \end{aligned}$$

ดังนั้น $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ ดีกรี 2

ตัวอย่าง 2.4.2 ต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์

$$1. f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2} + x \sin \frac{x}{y} \quad \text{ดีกรี } 1$$

$$2. G(x, y) = \tan \frac{x}{y} + \ln \left(\frac{2x}{y} + 1 \right) \quad \text{ดีกรี } 0$$

$$3. f(x, y) = \sqrt{x - y} \quad \text{ดีกรี } \frac{1}{2}$$

$$4. H(x, y) = F\left(1, \frac{y}{x}\right) \quad \text{ดีกรี } 0$$

$$\begin{aligned} \text{เหตุผลของข้อ 4 มีดังนี้ } H(tx, ty) &= F\left(1, \frac{ty}{tx}\right) \\ &= F\left(1, \frac{y}{x}\right) \\ &= {}^0 H(x, y) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.4.3 ต่อไปนี้มีใช่ฟังก์ชันเอกพันธ์

$$G(x, y) = x^3 - xy + y^3 \quad \text{เพราะไม่มีจำนวนจริง } k \text{ ซึ่ง}$$

$$G(tx, ty) = t^k G(x, y)$$

แบบฝึกหัด 2.4.1

จงทดสอบว่าฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์หรือไม่ ในกรณีที่เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ จงระบุดีกรีของฟังก์ชัน

$$1. 4x^2 - 3xy + y^2$$

$$2. 2y + \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$3. e^{x/y}$$

$$4. \tan \frac{3y}{x}$$

$$5. e^x$$

$$6. \tan x$$

$$7. (x^2 + y^2)e^{\frac{2x}{y}}$$

$$8. x \sin \frac{y}{x} - y \sin \frac{x}{y}$$

$$9. \frac{x^2 + 3xy}{x - 2y}$$

$$10. (u^2 - 4v)^{2-1/2}$$

$$11. \ln \frac{x}{y}$$

$$12. x \ln x - x \ln y$$

คำตอบแบบฝึกหัด 2.4.1

1. เป็น , ดีกรี 2

2. เป็น , ดีกรี 1

3. เป็น , ดีกรี 0

4. เป็น , ดีกรี 0

5. ไม่เป็น

6. ไม่เป็น

7. เป็น , ดีกรี 2

8. เป็น , ดีกรี 1

9. เป็น , ดีกรี 1

10. เป็น , ดีกรี -1

11. เป็น , ดีกรี 0

12. เป็น , ดีกรี 1

ข้อสังเกต 1. ถ้า F เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี k และ $x \neq 0$

$$\begin{aligned} F(x,y) &= F\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right) \\ &= x^k F\left(1, \frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

$$(\because F(tu, tv) = t^k F(u, v) \text{ ทุกค่า } u, v)$$

2. ถ้า M, N เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี k จะได้

$$M(x, y) = x^k \phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\text{และ } N(x, y) = x^k \psi\left(\frac{y}{x}\right) \text{ สำหรับบางฟังก์ชัน } \phi, \psi$$

$$M \text{ และ } N \text{ จะมีตัวประกอบร่วม } x^k$$

เมื่อตัดตัวประกอบร่วมออกไปจะเหลือฟังก์ชันของตัวแปรเดียว $v = \frac{y}{x}$ และ

ในกรณี $v = \frac{y}{x}$ สามารถเขียน $dy = v dx + x dv$

บทนิยาม 2.4.2 สมการ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ จะเป็นสมการสัมประสิทธิ์เอกพันธ์ก็ต่อเมื่อ M และ N เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ที่มีดีกรีเดียวกัน

ทฤษฎีบท 2.4.1 สมการสัมประสิทธิ์เอกพันธ์ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ จะเปลี่ยนเป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ โดยการแทนค่า

$$\begin{aligned} \overline{y = vx} \\ \text{หรือ } \overline{x = vy} \end{aligned}$$

พิสูจน์ (จะพิสูจน์กรณีแทนค่า $y = vx$ อีกกรณีหนึ่ง $x = vy$ ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด)

ให้ $y = vx$ ดังนั้น $dy = v dx + x dv$

แทนค่าข้างต้นนี้ในสมการ

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

จะได้

$$M(x, vx)dx + N(x, vx)(v dx + x dv) = 0$$

$$x^k M\left(1, v\right)dx + x^k N\left(1, v\right)(v dx + x dv) = 0$$

$$[M(1, v) + v N(1, v)]dx + x N(1, v)dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1,v)dv}{M(1,v) + vN(1,v)} = 0$$

ซึ่งอยู่ในรูป $\frac{dx}{x} + f(v)dv = 0$ เป็นสมการที่แยกตัวแปรได้ $\square$

ข้อสังเกต จากทฤษฎีบทนี้ เราสรุปขั้นตอนการแก้สมการสัมประสิทธิ์เอกพันธ์ ดังนี้

ขั้น 1. แทนค่า $y = vx$ (หรือ $x = vy$) ผลที่ได้จะเป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้
ซึ่งจะมีตัวแปร v กับ x เท่านั้น (หรือ v กับ y เท่านั้น)

ขั้น 2. แก้สมการที่ได้ในขั้น 1

ขั้น 3. แทนค่ากลับคืนด้วย $v = \frac{y}{x}$ (หรือ $v = \frac{x}{y}$) จะได้คำตอบตามต้องการ

ตัวอย่าง 2.4.4 จงทดสอบสมการต่อไปนี้เป็นสมการสัมประสิทธิ์เอกพันธ์ แสดงการแก้สมการ

$$\text{ด้วย } 2xy \, dx - (x^2 - y^2)dy = 0$$

วิธีทำ ก. ทดสอบสมการ

$$\begin{array}{l|l} M(x,y) = 2xy & N(x,y) = -(x^2 - y^2) \\ M(tx, ty) = 2(tx)(ty) & N(tx, ty) = -(t^2 x^2 - t^2 y^2) \\ = t^2 M(x, y) & = t^2 N(x, y) \end{array}$$

ทั้ง M และ N เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ มีดีกรี 2 เท่ากัน ดังนั้น สมการจึงเป็นสมการสัมประสิทธิ์เอกพันธ์

ข. การแก้สมการ (ในข้อนี้ควรเลือก $x = vy$ เมื่อแทนแล้วจำนวนพจน์จะน้อยกว่า และจะได้รูปง่ายกว่าใช้การแทน $y = vx$)

$$\text{ให้ } x = vy \text{ ดังนั้น } dx = v \, dy + y \, dv$$

แทนค่าเหล่านี้ในโจทย์

$$\left. \begin{array}{l} 2(vy)y (v \, dy + y \, dv) - (v^2 y^2 - y^2)dy = 0 \\ 2v(v \, dy + y \, dv) - (v^2 - 1)dy = 0 \\ (v^2 + 1)dy + 2vy \, dv = 0 \\ \frac{dy}{y} + \frac{2v \, dv}{v^2 + 1} = 0 \end{array} \right\} \quad (\text{ขั้น 1})$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ดังนั้น จะได้ } \ln|y| + \ln(v^2 + 1) = c \\ \text{หรือ } \ln|y|(v^2 + 1) = c \\ \text{จะได้ } y(v^2 + 1) = C \end{array} \right\} \quad (\text{ขั้น 2})$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{แทนค่า } v = \frac{x}{y} ; y\left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right) = C \\ \text{หรือ } \frac{x^2}{y} + y = Cy \end{array} \right\} \quad (\text{ขั้น 3})$$

ข้อสังเกต 1. ในการทดสอบสมการว่าเป็นสมการสัมประสิทธิ์เอกพันธ์หรือไม่ เราอาจให้

$$F(x, y) = aM(x, y) + bN(x, y) \quad a, b \text{ เป็นตัวคงค่าไม่เจาะจง}$$

$$\text{ถ้า } F(tx, ty) = t^k F(x, y) \text{ จะได้ สมการ}$$

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

$$\text{เป็นสมการสัมประสิทธิ์เอกพันธ์ เช่นสำหรับสมการ } 2xy \, dx - (x^2 - y^2)dy = 0$$

$$\text{เราให้ } F(x, y) = 2axy + b(x^2 - y^2)$$

$$F(tx, ty) = t^2 F(x, y) \text{ สำหรับทุกค่า } a, b$$

$$\text{ดังนั้น สมการ } 2xy \, dx - (x^2 - y^2)dy = 0 \text{ เป็นสมการสัมประสิทธิ์เอกพันธ์}$$

2. ในตัวอย่าง 2.4.4 เมื่อแทนค่า $x = vy$ ตอนท้ายขั้น 1 แล้วจะต้องไม่มี x กับ dx

ตัวอย่าง 2.4.5 จงแก้สมการ $(x + y)dx - (x - y)dy = 0$

วิธีทำ ให้ $F(x, y) = a(x + y) - b(x - y)$

เห็นชัดว่า $F(tx, ty) = t F(x, y)$ ดังนั้น สมการนี้เป็นสมการสัมประสิทธิ์เอกพันธ์

$$\text{ให้ } y = vx, \, dy = v \, dx + x \, dv$$

$$\text{แทนค่า เราได้ } (x + vx)dx - (x - vx)(v \, dx + x \, dv) = 0$$

$$(1 + v)dx - (1 - v)(v \, dx + x \, dv) = 0$$

$$(v^2 + 1)dx - x(1 - v)dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{(1-v)}{v^2 + 1} dv = 0$$

$$\ln |x| - \arctan v + \frac{1}{2} \ln(v^2 + 1) = \ln c$$

$$\ln \frac{|x|\sqrt{v^2 + 1}}{c} = \arctan v$$

$$x\sqrt{v^2 + 1} = C e^{\arctan v}$$

$$\text{คำตอบทั่วไป คือ } \sqrt{y^2 + x^2} = C e^{\arctan (y/x)}$$

แบบฝึกหัด 2.4.2

จงทดสอบสมการต่อไปนี้ว่าเป็นสมการสัมประสิทธิ์เอกพันธ์หรือไม่ และแสดงการแก้สมการดังกล่าว

$$1. (x - y)dy = (y - x)dx \qquad 2. y \, dx = x \, dy - \sqrt{x^2 + y^2} \, dx$$

$$3. (x^3 - y^3)dx + xy^2 \, dy = 0 \text{ เมื่อ } x = 1 \text{ ได้ } y = 1$$

$$4. (2x - 3y)dx + (7y^2 + x^2)dy = 0$$

$$5. e^{y/x} + y' - \frac{y}{x} = 0$$

$$6. \frac{dy}{dx} = \frac{y + x \cos^2\left(\frac{y}{x}\right)}{x}; y(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$7. \frac{dy}{dx} = \frac{ye^{y/x} + y}{x}$$

$$8. (3x^2 + 2xy + 4y^2)dx + (20x^2 + 6xy + y^2)dy = 0$$

$$*9. [2x \sin \frac{y}{x} + 2x \tan \frac{y}{x} - y \cos \frac{y}{x} - y \sec^2 \frac{y}{x}]dx + [x \cos \frac{y}{x} + x \sec^2 \frac{y}{x}]dy = 0$$

10. หาค่าของโค้งที่ตัดกับชุดของวงกลม $x^2 + y^2 = 2cx$ เป็นมุมฉาก ณ ทุก ๆ จุดตัดมีสมการ
ดิฟเฟอเรนเชียลเป็น $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ จงหาสมการชุดของโค้งดังกล่าว

11. จงแก้สมการ $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^5 + 3x^2y^2}{2x^3y - 2y^3}$ โดยจัดสมการในรูป $M dx + N dy = 0$ และใช้การ

แทนค่า $u = x^3, v = y^2$ (จงสังเกต $3x^2 dx = du, 3x^5 = 3x x^4 = 3x u^2, 2y dy = dv$)

12. จงแก้สมการ $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} + \frac{x^3}{y} + x \tan \frac{y}{x^2}$ โดยจัดรูป

$$\frac{dy}{dx} = x(2\frac{y}{x^2} + \frac{x^2}{y} + \frac{y}{x^2})$$
 แล้วใช้การแทนค่า $v = \frac{y}{x^2}$

จงสังเกตด้วยว่า ในสมการ $M dx + N dy = 0$ ถ้าสามารถเขียน

$$M(x, y) = x^{m-1} \phi\left(\frac{y}{x^m}\right), N(x, y) = \psi\left(\frac{y}{x^m}\right)$$
 แล้วเราสามารถแก้สมการ

$$M dx + N dy = 0$$
 ได้ โดยการแทนค่า $v = \frac{y}{x^m}$

คำตอบแบบฝึกหัด 2.4.2

$$1. x + y = c$$

$$2. cx^2 = y + \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$3. y^3 = x^3 - x \ln x$$

4. ไม่ใช่สมการสัมประสิทธิ์เอกพันธ์

$$5. \ln|x| - e^{-y/x} = c$$

$$6. 1 + \ln|x| = \tan \frac{y}{x}$$

$$7. \int \frac{e^{-v} dv}{v} = \ln|x| + c$$

$$8. y^2 + 7xy + x^2 = c(y + 3x)$$

$$9. x^2 \left(\sin \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x} \right) = c$$

$$10. x^2 + y^2 = 2by$$

$$11. \frac{1}{2} \ln(x^6 + y^4) + \tan^{-1} \frac{x^3}{y^2} = c$$

$$12. x^2 \cos \frac{y}{x^2} + y \sin \frac{y}{x^2} = cx^3$$

2.5 สมการแม่นตรง

ในวิชาแคลคูลัสผลต่างอนุพัทธ์รวมของ $F(x,y)$ คือ

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

ถ้าปรากฏว่า $f(x,y)dx + g(x,y)dy$ เป็นผลต่างอนุพัทธ์รวมของ $F(x,y)$ บางฟังก์ชันเรากล่าวว่า $f(x,y)dx + g(x,y)dy$ เป็นผลต่างอนุพัทธ์แม่นตรง (exact differential)

บทนิยาม 2.5.1 เรียกสมการ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ ซึ่ง $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ เป็นผลต่างอนุพัทธ์แม่นตรงของ $F(x, y)$ บางฟังก์ชันว่า สมการแม่นตรง (exact equation)

ตัวอย่าง 2.5.1 สมการ

1. $y dx + x dy = 0$

2. $\sin y dx + x \cos y dy = 0$

เป็นสมการแม่นตรง สามารถจัดรูปได้เป็น

1. $d(xy) = 0$

และ 2. $d(x \sin y) = 0$ ตามลำดับ และมีคำตอบรูปทั่วไปเป็น

1. $xy = c$

2. $x \sin y = c$ ตามลำดับ

ข้อสังเกต 1. อาจใช้ M แทน $M(x,y)$ เพื่อให้รูปกะทัดรัด กรณีไม่ประสงค์จะเน้นว่า M เป็นฟังก์ชันของ x, y

2. $M dx + N dy$ เป็นผลต่างอนุพัทธ์แม่นตรง dF ก็ต่อเมื่อ

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M \text{ และ } \frac{\partial F}{\partial y} = N$$

เพราะ $dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$

$$= M dx + N dy \text{ ซึ่งสัมประสิทธิ์ของ } dx \text{ เท่ากัน และของ } dy \text{ เท่ากัน}$$

3. ถ้าจัดรูปสมการแม่นตรงได้เป็น $dF = 0$ คำตอบทั่วไปคือ $F(x, y) = c$

4. ตัวอย่าง 2.5.1 เป็นสมการแม่นตรงซึ่งเราสังเกตได้ง่าย อาจมีสมการแม่นตรงที่มีรูปซับซ้อนยากต่อการสังเกต เราจึงมีเครื่องมือทดสอบการแม่นตรง คือ ทฤษฎีบท 2.5.1

ทฤษฎีบท 2.5.1 กำหนดให้ M, N มีอนุพันธ์ย่อยอันดับ 1 ที่ต่อเนื่อง เส้นไขที่จำเป็น และเพียงพอที่สมการ

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

เป็นสมการแม่นตรง ได้แก่

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (2)$$

พิสูจน์ ก. เงื่อนไขที่จำเป็น (จะแสดงว่า (2) เป็นเงื่อนไขที่จำเป็นของ (1))

ถ้า $M dx + N dy = 0$ เป็นสมการแม่นตรง จะมี $F(x, y)$ ซึ่ง

$$M = \frac{\partial F}{\partial x} \text{ และ } N = \frac{\partial F}{\partial y} \quad (\text{ข้อสังเกต 2 หัวข้อ 2.5})$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (\because \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \text{ และ } \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \text{ ต่อเนื่อง}) \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} \end{aligned}$$

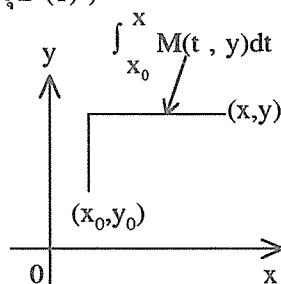
ข. เงื่อนไขที่เพียงพอ (จะพิสูจน์ว่าเงื่อนไข (2) เพียงพอที่จะสรุป (1))

$$\text{ถ้า } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\text{พิจารณา } F(x, y) = \int_{x_0}^x M(t, y) dt + \int_{y_0}^y N(x_0, u) du$$

(x_0, y_0) เป็นจุดกลางของบริเวณสี่เหลี่ยม

ผืนผ้าที่มีคำตอบทฤษฎีบทการมีคำตอบ



$$\text{จะได้ } \frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) \quad (\text{ทฤษฎีบทพื้นฐานของแคลคูลัส})$$

$$\begin{aligned} \text{และ } \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_{x_0}^x M(t, y) dt \right] + N(x_0, y) \\ &= \int_{x_0}^x M_y(t, y) dt + N(x_0, y) \\ &= \int_{x_0}^x N_x(t, y) dt + N(x_0, y) \quad (\because M_y = N_x) \\ &= N(x, y) - N(x_0, y) + N(x_0, y) \\ &= N(x, y) \end{aligned}$$

ดังนั้น $M dx + N dy = dF$ และสมการ (1) เป็นสมการแม่นตรง $\square$

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างการทดสอบสมการแม่นตรง และวิธีแก้สมการ

ตัวอย่าง 2.5.2 จงแสดงว่า

$$2xy dx + (1 + x^2) dy = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

เป็นสมการแม่นตรง และหาคำตอบรูปทั่วไป

วิธีทำ เราให้ $M(x, y) = 2xy$, $N(x, y) = 1 + x^2$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ดังนั้น สมการ (1) เป็นสมการแม่นตรง

สำหรับการแก้สมการจะแสดงให้ดู 2 วิธี

วิธี 1 เนื่องจากสมการ (1) เป็นสมการแม่นตรงจะมี $F(x, y)$ ซึ่ง $\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy$

$$\text{และ } \frac{\partial F}{\partial y} = 1 + x^2$$

$$\text{จาก } \frac{\partial F}{\partial x} = 2xy$$

จะได้ $F(x, y) = x^2 y + h(y)$ (ได้มาจากการอินทิเกรตเทียบกับ x โดยให้ y คงที่)

เพียงแต่ทราบ $h(y)$ จะทราบ $F(x, y)$ และทราบคำตอบ

$$\text{จากสมการสุดท้าย } \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + h'(y)$$

$$\text{แต่เราทราบว่า } \frac{\partial F}{\partial y} = 1 + x^2$$

$$\text{ดังนั้น } x^2 + h'(y) = 1 + x^2$$

$$h'(y) = 1$$

$$h(y) = y + k, \quad k \text{ เป็นตัวคงค่า}$$

ดังนั้น จะได้ $F(x, y) = x^2 y + y$ เป็นฟังก์ชันตามความต้องการฟังก์ชันหนึ่ง และ

คำตอบรูปทั่วไป คือ $x^2 y + y = c$

วิธี 2 จาก $2xy \, dx + (1 + x^2) \, dy = 0$

$$\text{จะได้ } (2xy \, dx + x^2 \, dy) + dy = 0$$

$$d(x^2 y) + dy = 0$$

$$d(x^2 y + y) = 0$$

$$\text{ดังนั้น คำตอบคือ } x^2 y + y = c$$

ตัวอย่าง 2.5.3 จงแก้สมการ $(xy \cos xy + \sin xy) \, dx + (x^2 \cos xy + e^y) \, dy = 0$

วิธีทำ $M(x, y) = xy \cos xy + \sin xy, \quad N(x, y) = x^2 \cos xy + e^y$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \cos xy - x^2 y \sin xy = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ดังนั้น สมการโจทย์เป็นสมการแม่นตรง เราต้องการ $F(x, y)$ ในรูปง่ายที่สุด

$$\text{ซึ่ง } \frac{\partial F}{\partial x} = M \text{ และ } \frac{\partial F}{\partial y} = N$$

$$\text{จาก } \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 \cos xy + e^y \quad (\text{หา } F \text{ ง่ายกว่าเริ่มด้วย } \frac{\partial F}{\partial x} = M)$$

$$F(x, y) = x \sin xy + e^y + g(x) \quad (\text{ได้มาจากการอินทิเกรตเทียบกับ } y)$$

โดยให้ x คงที่)

$$\text{ซึ่งจะได้ } \frac{\partial F}{\partial x} = xy \cos xy + \sin xy + g'(x)$$

$$\text{แต่เรามี } \frac{\partial F}{\partial x} = xy \cos xy + \sin xy$$

$$\text{ดังนั้น } g'(x) = 0 \text{ เราใช้ } g(x) = 0 \text{ และ } F(x, y) = x \sin xy + e^y$$

$$\text{คำตอบรูปทั่วไป คือ } x \sin xy + e^y = c$$

ตัวอย่าง 2.5.4 จงแสดงว่า สมการแม่นตรง $M dx + N dy = 0$ ซึ่ง M และ N เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรีเดียวกันและไม่เป็น -1 จะมีคำตอบคือ

$$xM + yN = c$$

วิธีทำ ให้ k เป็นดีกรีของ M และ N

$$\begin{aligned} \therefore k(M dx + N dy) &= (x \frac{\partial M}{\partial x} + y \frac{\partial M}{\partial y}) dx + (x \frac{\partial N}{\partial x} + y \frac{\partial N}{\partial y}) dy \quad (\text{ออยเลอร์})^* \\ &= (x \frac{\partial M}{\partial x} + y \frac{\partial N}{\partial x}) dx + (x \frac{\partial M}{\partial y} + y \frac{\partial N}{\partial y}) dy \\ &= x(\frac{\partial M}{\partial x} dx + \frac{\partial M}{\partial y} dy) + y(\frac{\partial N}{\partial x} dx + \frac{\partial N}{\partial y} dy) \\ &= x dM + y dN \end{aligned}$$

บวกด้วย $Mdx + Ndy$ ทั้งสองข้างจะได้

$$\begin{aligned} \therefore (k+1)(Mdx + Ndy) &= Mdx + Ndy + x dM + y dN \\ &= (Mdx + x dM) + (Ndy + y dN) \\ &= d(xM + yN) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น เมื่อ } k \neq -1 \text{ จะได้ } Mdx + Ndy = d \left[\frac{1}{k+1} (xM + yN) \right]$$

$$\text{ดังนั้น คำตอบรูปทั่วไปคือ } \frac{1}{k+1} (xM + yN) = c$$

$$\text{หรือ } xM + yN = C$$

* ทฤษฎีบทของออยเลอร์เกี่ยวกับฟังก์ชันเอกพันธ์

ทฤษฎีบท (Euler) ถ้า $F(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ ดีกรี k จะได้

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} = kF$$

พิสูจน์ สำหรับแต่ละค่าของ x, y ให้ $g(t) = F(tx, ty)$

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\partial F}{\partial (tx)}(tx, ty) \frac{d}{dt}(tx) + \frac{\partial F}{\partial (ty)}(tx, ty) \frac{d}{dt}(ty) \\ &= x \frac{\partial F}{\partial (tx)}(tx, ty) + y \frac{\partial F}{\partial (ty)}(tx, ty) \end{aligned}$$

$$g'(1) = x \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{แต่ } g(t) = F(tx, ty) = t^k F(x, y)$$

$$\text{ดังนั้น } g'(t) = k t^{k-1} F(x, y)$$

$$g'(1) = k F(x, y) \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{จาก (1) และ (2) } x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} = kF$$

สรุปผลจากตัวอย่าง 2.5.4 เพื่อนำไปใช้

ถ้าปรากฏว่าสมการ $Mdx + Ndy = 0$

เป็นสมการสัมประสิทธิ์เอกพันธ์, ดีกรี $k \neq -1$ และเป็นสมการแม่นตรงพร้อมกัน จะ

ได้คำตอบ คือ $xM + yN = c$

ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.5.5 สมการ $x(x^2 + 3y^2)dx + y(y^2 + 3x^2)dy = 0$

มีสัมประสิทธิ์เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ ดีกรี 3 เหมือนกัน และเป็นสมการแม่นตรง

คำตอบ คือ $x^2(x^2 + 3y^2) + y^2(y^2 + 3x^2) = c$

หรือ $x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = c$

แบบฝึกหัด 2.5

ตอน 1 จงทดสอบสมการต่อไปนี้ว่าเป็นสมการแม่นตรงหรือไม่ แล้วจงหาคำตอบทั่วไป

สำหรับข้อ 1-3 และข้อ 5 อาจเขียนคำตอบได้เลย โดยดูจากตัวอย่าง 2.5.5

1. $y' = \frac{x-y}{x+y}$

2. $2xyy' = x^2 - y^2$

3. $y' = -\frac{y}{x-y}$

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y \cos x}{\sin x + y}$

5. $(2x \sin \frac{y}{x} + 2x \tan \frac{y}{x} - y \cos \frac{y}{x} - y \sec^2 \frac{y}{x}) dx + (x \cos \frac{y}{x} + x \sec^2 \frac{y}{x}) dy = 0$

6. $y' = \frac{y(y-e^x)}{e^x - 2xy}$

7. $(x^2 + x)dy + (x^2 + 1 + 2 \cos x)dx = 0$

8. $y' = \frac{x-y-2}{x+y+2}$

9. $2xy dx + (x^2 + 1)dy = 0$; $y(1) = -3$

10. $\frac{dx}{dy} = \frac{x \sec^2 y}{\sin 2x - \tan y}$

11. $ye^{-x^2} dx + [\int_0^x e^{-t^2} dt + y]dy = 0$ เมื่อ $x = 1, y = 1$

12. $\left[\frac{y}{(x+y)^2} - 1 \right] dx + \left[1 - \frac{x}{(x+y)^2} \right] dy = 0$

13. จงพิสูจน์ว่า เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับสมการ

$[f_1(x) + g_1(y)]dx + [f_2(x) + g_2(y)]dy = 0$ จะเป็นสมการแม่นตรงคือ

$g_1(y)dx + f_2(x)dy$ เป็นผลต่างอนุพันธ์แม่นตรง

14. จงหาฟังก์ชันรูปแบบทั่วไปที่สุด $N(x, y)$ ซึ่งทำให้ $(y \sin x + x^2 y - x \sec y)dx + N(x, y)dy = 0$ เป็นสมการแม่นตรง และจงแก้สมการแม่นตรงนั้น

15. จงแสดงว่า $yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$ ไม่เป็นสมการแม่นตรง แต่ถ้าคูณด้วย

$$(xy[f(xy) - g(xy)])^{-1} \text{ แล้วจะได้ผลเป็นสมการแม่นตรง}$$

16. จงใช้ความรู้จากข้อ 15 แก้สมการ $(xy^2 + 2y)dx + (3x^2y - 4x)dy = 0$

คำตอบแบบฝึกหัด 2.5 ตอน 1

1. $x^2 - 2xy - y^2 = c$

2. $3xy^2 - x^3 = c$

3. $2xy - y^2 = c$

4. $x^2 - y^2 - 2y \sin x = c$

5. $x(2x \sin \frac{y}{x} + 2x \tan \frac{y}{x} - y \cos \frac{y}{x} - y \sec^2 \frac{y}{x}) + y(x \cos \frac{y}{x} + x \sec^2 \frac{y}{x}) = c$

6. $xy^2 - ye^x = c$

7. ไม่เป็นสมการแม่นตรง

8. $x^2 - 2xy - y^2 - 4x - 4y = k$

9. $x^2y + y + 6 = 0$

10. $2x \tan y + \cos 2x = 2\pi + 1$

11. $2y \int_0^x e^{-t^2} dt + y^2 = 2 \int_0^1 e^{-x^2} dx + 1$

12. $x^2 + y^2 - x^2 = c(x + y)$

14. $N(x,y) = -\cos + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \sec y \tan y + F(y), \frac{1}{3}x^3y - y \cos x - \frac{1}{2}x^2 \sec y + \int F(y)dy = c$

15. $y^4(3 - xy)^5 = cx^2$

ตอน 2 ศึกษาแนวการแก้สมการแม่นตรง เพื่อหาวิธีลัดสำหรับการแก้สมการ

จากการตรวจสอบ แล้วปรากฏว่า

$$(2x + 2xy)dx + (2y + x^2)dy = 0 \quad \text{เป็นสมการแม่นตรง}$$

เราจะหา $F(x, y)$ ซึ่ง dF เท่ากับข้างซ้ายของสมการ พิจารณา 6 สมการ :-

(1) $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2xy$	เงื่อนไขสมการแม่นตรง
(2) $F = \int (2x + 2xy)dx = x^2 + x^2y + h(y)$	อินทิเกรต (1) เทียบกับ x โดย y คงที่
(3) $\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + h'(y)$	หาอนุพันธ์ย่อยของ (2) เทียบกับ y
(4) $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + x^2$	เงื่อนไขสมการแม่นตรง
(5) $F = \int (x^2 + 2y + x^2)dy = y^2 + x^2y$	อินทิเกรต (4) เทียบกับ y โดย x คงที่ ไม่ได้ค่าคงที่ของการอินทิเกรต
(6) $F = x^2 + x^2y + y^2$	หาค่า $h(y)$ จากการเทียบสมการ (3) กับ (4) แล้วหา $h(y)$ แทนค่าใน (2)

หลักการเขียนค่า $h(y)$ ต่อท้าย $x^2 + x^2 y$ เพื่อได้ F ใน (6) ให้พิจารณาว่าเนื่องจากการหาอนุพันธ์แบบใดก็ตาม เราทำได้ทีละพจน์ไม่ต้องมาเกี่ยวข้องกัน ในการเขียนค่า $h(y)$ ต่อท้าย $x^2 + x^2 y$ ใน (2) ส่วนที่ซ้ำกันของ (2) กับ (5) (คือ $x^2 y$) นั้น จะไม่ปรากฏใน $h(y)$ เพราะส่วนนี้เมื่อหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ y จะเป็น x^2 ซึ่งซ้ำกันใน (3) และ (4) และถูกตัดออกไปเนื่องจากการเทียบสมการหา $h'(y)$

ดังนั้นจากโจทย์คำตอบ คือ

$$x^2 + x^2 y + \overset{\text{ซ้ำไม่ต้องเขียน}}{\underbrace{y^2 + \dots}_{h(y)}} = c$$

อินทิกรัล N เทียบกับ y ตัดพจน์ซ้ำออก

ตัวอย่างการใช้วิธีตัด

$$2xy \, dx + (1 + x^2)dy = 0 \quad \text{เป็นสมการแม่นตรง}$$

คำตอบคือ $\boxed{x^2 y} + \boxed{y^2} = c$

อินทิกรัล $2xy$
เทียบกับ x

อินทิกรัล $1 + x^2$ เทียบกับ y
ตัดส่วนที่ซ้ำกับข้างหน้าออก

จงใช้วิธีตัดหาคำตอบของสมการแม่นตรงต่อไปนี้

1. $y^3 \, dx + (3y^2 + 3xy^2 - y^3)dy = 0$
2. $(6x + y^2)dx + y(2x - 3y)dy = 0$
3. $(2xy - 3x^2)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$
4. $(\cos 2y - 3x^2 y^2)dx + (\cos 2y - 2x \sin 2y - 2x^3 y)dy = 0$
5. $(xy e^x + y^2 e^x)dx + (xe^x + 2y e^x - e^x)dy = 0$

คำตอบตอน 2

1. $xy^3 + y^3 - \frac{y^4}{4} = c$
 2. $3x^2 + xy^2 - y^3 = c$
 3. $x^2 y - x^3 + \frac{y^2}{2} = c$

4. $\frac{1}{2} \sin 2y + x \cos 2y - x^3 y^2 = c$
 5. $e^x (x-1)y + y^2 e^x = c$ (อินทิกรัล M และ N)
- ให้เป็นผลสำเร็จก่อนที่จะเทียบว่ามีพจน์ใดซ้ำกัน)

2.6 ตัวประกอบเพื่ออินทิเกรต

จุดประสงค์สำคัญในหัวข้อนี้ คือ การแก้สมการที่มีใช้สมการแม่นยำ โดยใช้เครื่องมืออย่างหนึ่งที่เรียกว่าตัวประกอบเพื่ออินทิเกรต (integrating factors)

ทฤษฎีบท 2.6.1 กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งมีคำตอบในบางช่วง

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

จะมีฟังก์ชัน $\mu(x, y)$ ซึ่ง $\mu(M dx + N dy) = dF$ สำหรับบางฟังก์ชัน $F(x, y)$

พิสูจน์ ให้คำตอบของสมการ (1) คือ

$$F(x, y) = c$$

จะได้

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

$$\text{แต่จาก (1)} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{M}{N}$$

$$\text{และ} \quad \frac{\partial x}{M} = \frac{\partial y}{N} = \mu(x, y) \quad \text{บางฟังก์ชัน} \quad \dots\dots\dots (3)$$

อัตราส่วนร่วม $\mu(x, y)$ นี้เป็นฟังก์ชันที่มีคุณสมบัติดังทฤษฎีบท แสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \mu(M dx + N dy) &= \mu M dx + \mu N dy \\ &= \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy \quad (\text{จาก 3}) \\ &= d F(x, y) \end{aligned}$$

บทนิยาม 2.6.1 เรียก $\mu(x, y)$ ซึ่ง $\mu(M dx + N dy) = dF$ สำหรับบางฟังก์ชัน $F(x, y)$ ว่า

ตัวประกอบเพื่ออินทิเกรต ของ $M dx + N dy$ ใช้สัญลักษณ์ย่อ I.F.

ถ้า μ เป็นตัวประกอบเพื่ออินทิเกรตได้ทุกส่วนของสมการเชิงอนุพันธ์

เรียก μ ว่าตัวประกอบเพื่ออินทิเกรตของสมการเชิงอนุพันธ์นั้น

ข้อสังเกต 1. ถ้า k คงที่ $\neq 0$ μ เป็นตัวประกอบเพื่ออินทิเกรต ก็ต่อเมื่อ $k\mu$ เป็นตัวประกอบเพื่ออินทิเกรต

2. ในทฤษฎีบท 2.6.1 เมื่อนำ I.F. $\mu(x, y)$ คูณสมการ (1) จะได้สมการ

$$\mu M dx + \mu N dy = 0$$

ซึ่งเป็นสมการแม่นยำ แต่เราไม่อาจหา μ จากการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ได้

เนื่องจากเราใช้ $\mu = \frac{\partial F}{\partial x} / M$ ซึ่งขึ้นกับฟังก์ชัน $F(x, y)$ ซึ่งในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เรายังไม่ทราบ วิธีการหาตัวประกอบเพื่ออินทิเกรตนั้น ได้แก่ การสังเกตรูปตัวประกอบของผลต่างอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่าง ๆ และการใช้ทฤษฎีบทสืบเนื่องจากการทดสอบสมการแน่นอนตรง

ตัวอย่างการสังเกตรูปตัวประกอบของผลต่างอนุพันธ์

ตัวอย่าง 2.6.1 เราทราบว่า $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^2}(x dy - y dx)$

ดังนั้น $\frac{1}{x^2}$ เป็นตัวประกอบเพื่ออินทิเกรตของ $x dy - y dx$

ตัวประกอบเพื่ออินทิเกรตของ $x dy - y dx$ มีหลายจำนวน ได้แก่

$$\frac{1}{x^2}, \frac{1}{y^2}, \frac{1}{xy}, \frac{1}{x^2 + y^2}$$

และ $\frac{1}{ax^2 + bxy + cy^2}$ ซึ่งเป็นรูปทั่วไป เพราะว่า

$$\begin{aligned} \frac{x dy - y dx}{ax^2 + bxy + cy^2} &= \frac{(x dy - y dx) / x^2}{a + b\left(\frac{y}{x}\right) + c\left(\frac{y}{x}\right)^2} \\ &= \frac{d(y/x)}{a + b\left(\frac{y}{x}\right) + c\left(\frac{y}{x}\right)^2} \\ &= dF\left(\frac{y}{x}\right) \text{ โดย } F(u) = \int \frac{du}{a + bu + cu^2} \end{aligned}$$

การตัดสินใจจะเลือกใช้ตัวประกอบเพื่อการอินทิเกรตเหล่านี้ขึ้นอยู่กับส่วนประกอบอื่น

ของสมการ ดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง 2.6.2 จงแก้สมการต่อไปนี้ (ใช้ตัวประกอบเพื่ออินทิเกรตเมื่อจำเป็น)

1. $x dy + y dx = 3x^2 dx$
2. $x dy - y dx = xy^3 dx$
3. $x dy - y dx = (x^2 + xy - 2y^2) dx$
4. $x dy - y dx = (y^2 - 3) dy$
5. $x dy - y dx = y^3(x^2 + y^2) dy$

วิธีทำ

1. จัดรูปได้เป็น $d(xy) = 3x^2 dx$ ได้คำตอบ $xy = x^3 + c$

2. จัดรูปได้เป็น $\frac{x dy - y dx}{x^2} = \frac{y^3}{x} dx$
 $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y^3}{x} dx$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{-3} d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{2}{x} dx$$

คำตอบคือ $-\frac{1}{2} \frac{x^2}{y^2} = \frac{x^3}{3} + c$

3. $x dy - y dx = (x^2 + xy - 2y^2) dx$

จัดรูปได้เป็น $\frac{xdy - ydx}{x^2 + xy - 2y^2} = dx$

$$\frac{(xdy - ydx) / x^2}{1 + \left(\frac{y}{x}\right) - 2\left(\frac{y}{x}\right)^2} = dx$$

$$\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right) - 2\left(\frac{y}{x}\right)^2} = dx$$

พิจารณาอินทิกรัลของซ้ายมือของสมการ ให้ $v = \frac{y}{x}$ เราได้

$$\int \frac{dv}{1+v-2v^2} = \int \left(\frac{2}{3} \frac{1}{1+2v} + \frac{1}{3} \frac{1}{1-v} \right) dv$$

$$= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{1+2v}{1-v} \right|$$

ดังนั้น คำตอบทั่วไป คือ $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{1+2y/x}{1-y/x} \right| = x + \ln c$

หรือ $\frac{x+2y}{x-y} = C e^{3x}$

4. $x dy - y dx = (y^2 - 3) dy$

จัดรูปได้เป็น $\frac{xdy - ydx}{y^2} = \left(1 - \frac{3}{y^2}\right) dy$

$$-d\left(\frac{x}{y}\right) = \left(1 - \frac{3}{y^2}\right) dy$$

คำตอบคือ $-\frac{x}{y} = y + \frac{3}{y} + c$

หรือ $x + y^2 + 3 + cy = 0$

5. $x dy - y dx = y (x^2 + y^2) dy$

จัดรูปได้เป็น $\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = y dy$

$$\frac{(xdy - ydx) / x^2}{1 + (y/x)^2} = y dy$$

$$\frac{d(y/x)}{1 + (y/x)^2} = y dy$$

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{4} y^4 + c$$

$$\begin{aligned}\text{ตัวอย่าง 2.6.3 จาก } d(x^p y^q) &= p x^{p-1} y^q dx + q x^p y^{q-1} dy \\ &= x^{p-1} y^{q-1} (py dx + qx dy)\end{aligned}$$

จะได้ $x^{p-1} y^{q-1}$ เป็นตัวประกอบเพื่ออินทิเกรตของ $py dx + qx dy$

ตัวอย่าง 2.6.4 (ฝึกหัด)

- กำหนด $3y dx + 5x dy$ ใช้ I.F. $x^2 y^4$ คูณ ได้ $3x^2 y^5 dx + 5x^3 y^4 dy$
หรือ $d(x^3 y^5)$
- กำหนด $3y dx - 5x dy$ ใช้ I.F. $x^2 y^{-6}$ คูณ ได้ $d(x^3 y^{-5})$
- กำหนด $\frac{1}{2}y dx - \frac{2}{3}x dy$ ใช้ I.F. $x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{5}{3}}$ คูณ ได้ $d(x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{2}{3}})$

ตัวอย่าง 2.6.5 จงแก้สมการต่อไปนี้

- $2y dx + 3x dy = \frac{3}{x} dy$
- $x dy - 2y dx = (xy)^3 y dy$
- $x dy + 2y dx = x^3 y^3 dy$
- $x dy - 3y dx = x^4 y^{-1} dx$
- $x dx + y dy = (x^2 + y^2)^2 (x dy - y dx)$

วิธีทำ 1. ใช้รูปผลต่างอนุพัทธ์ตัวอย่าง 2.6.3 เราได้ $p = 2, q = 3$ ใช้ xy^2 คูณได้

$$\begin{aligned}xy^2 (2y dx + 3x dy) &= 3y^2 dy \\ d(x^2 y^3) &= 3y^2 dy \\ x^2 y^3 &= y^3 + c\end{aligned}$$

2. ในข้อนี้ $p = -2, q = 1$ ใช้ x^{-3} คูณได้

$$\begin{aligned}x^{-3} (x dy - 2y dx) &= y dy \\ d(x^{-2} y) &= y dy \\ x^{-2} y &= \frac{y^2}{2} + c \\ x^2 y^5 - 5y + C x^2 &= 0\end{aligned}$$

$$3. \text{ ใช้ } x \text{ คูณ จะได้ } d(x^2 y) = x^4 y^3 dy$$

$$\frac{d(x^2 y)}{x^4 y^2} = y dy$$

$$-\frac{1}{x^2 y} = \frac{y^2}{2} + c$$

$$x^2 y^3 + 2 + C x^2 y = 0$$

$$4. \text{ ใช้ } x^{-4} \text{ คูณได้ } d(x^{-3} y) = y^{-1} dx$$

$$x^{-3} y d(x^{-3} y) = x^{-3} dx$$

$$\frac{1}{2} x^{-6} y^2 = -\frac{1}{2x^2} + c$$

$$y^2 = -x^4 + C x^6$$

$$5. \text{ เนื่องจาก } xdx + ydy = \frac{1}{2} d(x^2 + y^2) \text{ และ I.F. ของ } x dy - y dx$$

$$\text{ได้แก่ } \frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$\text{ดังนั้นคูณด้วย } (x^2 + y^2)^{-4} \text{ ได้}$$

$$\frac{xdx + ydy}{(x^2 + y^2)^4} = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^4} = \frac{d(y/x)}{1 + (y/x)^2}$$

$$-\frac{1}{6(x^2 + y^2)^3} = \arctan(y/x) + c$$

ตัวอย่าง 2.6.6 ถ้า $\frac{j}{k} \neq \frac{m}{n}$ จะมีตัวประกอบร่วมเพื่ออินทิเกรตของ

$$x^a y^b (jy dx + kx dy) \text{ และ } x^c y^d (mydx + nxdy) \text{ หรือไม่}$$

[ข้อแนะ พิจารณาก่อนว่าอะไรคูณกับ $x^a y^b (jy dx + kx dy)$ แล้วได้ $x^{j-1} y^{k-1} (jydx + kx dy)$]

วิธีทำ ตัวประกอบเพื่ออินทิเกรตของ $x^a y^b (jy dx + kx dy)$ อยู่ในรูป $(x^j y^k)^\alpha x^{j-a-1} y^{k-b-1}$

เพราะว่า

$$(x^j y^k)^\alpha x^{j-a-1} y^{k-b-1} [x^a y^b (jy dx + kx dy)] = (x^j y^k)^\alpha d(x^j y^k) \dots (*)$$

ทำนองเดียวกันตัวประกอบเพื่ออินทิเกรตของ $x^c y^d (mydx + nxdy)$ อยู่ในรูป

$$(x^m y^n)^\beta x^{m-c-1} y^{n-d-1}$$

เพื่อให้ได้ตัวประกอบร่วมเพื่ออินทิเกรต ตัวประกอบทั้งคู่ต้องเท่ากัน นั่นคือ

$$j\alpha + j - a - 1 = m\beta + m - c - 1 \quad (\text{เทียบกำลังของ } x)$$

$$\text{และ } k\alpha + k - b - 1 = n\beta + n - d - 1 \quad (\text{เทียบกำลังของ } y)$$

$$\text{นั่นคือ} \quad \begin{cases} j\alpha - m\beta & = & m + a - (j + c) \\ k\alpha - n\beta & = & n + b - (k + d) \end{cases}$$

ระบบสมการนี้ มีคำตอบสำหรับ α, β เพราะ $j/k \neq (-m)/(-n)$

ดังนั้น ทั้งสองนิพจน์ของไอเทย์มีตัวประกอบร่วมเพื่ออินทิเกรต ซึ่งอยู่ในรูป $x^r y^s$

ตัวอย่าง 2.6.7 จงแก้สมการ $x^3 y^3 (2y dx + x dy) - (5y dx + 7x dy) = 0$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{2}{1} \neq \frac{5}{7}$ มีตัวประกอบเพื่ออินทิเกรตของสมการนี้

I.F. ของ $x^3 y^3 (2y dx + x dy)$ อยู่ในรูป $(x y)^\alpha x^{1-3} y^{0-3}$

I.F. ของ $5y dx + 7x dy$ อยู่ในรูป $(x y)^5 x^{\beta-4} y^{6-7}$

ให้ I.F. ทั้งสองเป็นจำนวนเดียวกัน จะได้ $2\alpha - 2 = 5\beta + 4$

$$\alpha - 3 = 7\beta + 6$$

$$\text{หรือ} \quad 2\alpha - 5\beta = 6$$

$$\alpha - 7\beta = 9$$

$$\text{ได้} \quad \alpha = \frac{6(-7) - 9(-5)}{2(-7) - 1(-5)} = \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{และ} \quad \beta = \frac{2(9) - 1(6)}{2(-7) - 1(-5)} = \frac{12}{-9} = -\frac{4}{3}$$

ดังนั้น เมื่อนำ I.F. นี้ คูณตลอดจะได้ $(x y)^2 d(x y) - (x y)^5 d(x y) = 0$

(ดูเทียบจากบรรทัด (*) ในตัวอย่าง 2.6.6)

$$\text{คำตอบทั่วไป คือ} \quad \frac{3}{2}(x^2 y)^{\frac{2}{3}} + 3(x^5 y^7)^{-\frac{1}{3}} = c$$

$$\text{หรือ} \quad x^3 y^3 + 2 = C x^{5/3} y^{7/3}$$

เพื่อสะดวกในการตรวจสอบ และการใช้ผลต่างอนุพันธ์แม่นยำตรง ให้พิจารณาจากกราฟการต่อไปนี้

รูปผลต่างอนุพันธ์แม่นยำตรง (exact differentials)

$$1. \quad x dy + y dx = d(xy)$$

$$2. \quad x dx \pm y dy = d\left[\frac{1}{2}(x^2 \pm y^2)\right]$$

$$3. \quad \frac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$4. \quad \frac{xdy - ydx}{y^2} = d\left(-\frac{x}{y}\right)$$

$$5. \quad \frac{xdy - ydx}{xy} = d \ln \left| \frac{y}{x} \right|$$

$$6. \quad \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = d \arctan \frac{y}{x}$$

$$7. \quad \frac{xdy - ydx}{x^2 - y^2} = d\left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+y}{x-y} \right| \right)$$

$$8. \frac{dxy - ydx}{x\sqrt{x^2 - y^2}} = d \arcsin \frac{y}{x}$$

$$9. \frac{dx + dy}{x + y} = d \ln |x + y|$$

ต่อไปเราจะพิจารณาสืบต่อจากการทดสอบสมการแม่นตรง ในกรณีที่สมการมิใช่สมการแม่นตรง

ถ้า $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$ อาจมีคุณสมบัติบางประการที่จะหาตัวประกอบเพื่ออินทิเกรต ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.6.2 กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ (1)

กรณี 1. ถ้า $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x ตัวเดียว จะได้ $e^{\int f(x)dx}$ เป็น I.F.

กรณี 2. ถ้า $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = g(y)$ เป็นฟังก์ชันของ y ตัวเดียว จะได้ $e^{-\int g(y)dy}$ เป็น I.F.

พิสูจน์ ให้ $\mu(x,y)$ เป็น I.F. สมการ $M dx + N dy = 0$

$$\text{จะได้ } \frac{\partial}{\partial y} \mu M = \frac{\partial}{\partial x} \mu N$$

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} \text{กรณี 1 จัดรูปได้ } \mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) &= N \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{M}{N} \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) \\ &= N \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) \quad (\because \text{จาก (1) } \frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N}) \\ &= N \frac{d\mu}{dx} \quad (\mu = \mu(x, y) \text{ และ } y = y(x)) \\ \text{ดังนั้น } \frac{d\mu}{\mu} &= \left(\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \right) dx \end{aligned}$$

$$\text{และ } \mu = e^{\int f(x)dx} \text{ เป็น I.F. } \square$$

กรณี 2 ให้เป็นแบบฝึกหัด

ตัวอย่าง 2.6.8 จงแก้สมการต่อไปนี้

$$1. y dx + (3 + 3x - y)dy = 0$$

$$2. (xy + y - 1)dx + x dy = 0$$

วิธีทำ 1. $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = \frac{1-3}{y} = \frac{-2}{y}$ เป็นฟังก์ชันของ y ตัวเดียว

$$\text{ดังนั้น I.F. ได้แก่ } e^{-\int \frac{2}{y} dy} = e^{-2 \ln y} \text{ เลือก } e^{2 \ln y} = e^{\ln y^2} = y^2 \text{ เป็น I.F.}$$

ดังนั้น เราได้สมการ $y^3 dx + (3y^2 + 3xy^2 - y^3)dy = 0$ เป็นสมการแม่นตรง

คำตอบทั่วไปคือ $xy^3 + y^3 - \frac{y^4}{4} = c$

2. $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{x+1-1}{x} = \frac{x}{x} = 1$ ถือเป็นฟังก์ชันคงที่ (constant function) ของตัวแปร x (เพื่อใช้ทฤษฎีบทได้)

ดังนั้น I.F. ได้แก่ $e^{\int 1 dx}$ ใช้ e^x เป็น I.F.

และเราได้สมการ $(xe^x y + ye^x - e^x)dx + xe^x dy = 0$ เป็นสมการแม่นตรง

คำตอบทั่วไปคือ $xe^x y - e^x = c$

ข้อสังเกต การหาค่า $e^{\ln y^2}$ ทำให้ได้ 2 ลักษณะ คือ

ก. ใช้ $e^{\ln y^2} = \exp(\ln y^2) = y^2$ เพราะ $\exp$ กับ $\ln$ เป็นฟังก์ชันอินเวอร์สของกันและกัน

ข. เราทราบว่า $e^{\ln y^2}$ เป็นจำนวนจริง ให้ $u = e^{\ln y^2}$ จะได้

$\ln u = \ln y^2$ และ $u = y^2$ โดยเหตุผล $\ln$ เป็นฟังก์ชัน 1-1

นั่นคือ $e^{\ln y^2} = y^2$

ลักษณะ ข. มีที่ใช่มาก ถ้าเราทราบว่าสัญลักษณ์ที่กำหนดให้ แทนจำนวนจริง เราให้จำนวนจริงนั้น แทนด้วยตัวแปร เช่น แทนด้วย u ใช้ความรู้ในเรื่องนั้น ๆ สืบค้นค่าของ u ค่าที่ได้คือค่าสัญลักษณ์ที่กำหนดให้ ลองใช้หลักการนี้หาค่าสัญลักษณ์ต่อไปนี้

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}}, \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\ldots}}}, \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}}$$

หลักการนี้ใช้กับ $1 - 1 + 1 + 1 + \ldots$ ไม่ได้ เพราะสัญลักษณ์นี้ไม่แทนจำนวนจริง เนื่องจากอนุกรมนี้ ลู่ออก (divergent)

ตัวอย่าง 2.6.9 จงแก้สมการ $(xy^3 + y)dx + x dy = 0$

(พิจารณาจาก $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{3xy^2+1-1}{N} = \frac{3xy^2}{x} = 3y^2$)

เราใช้ทฤษฎีบท 2.6.2 ไม่ได้ จึงต้องแก้ด้วยวิธีอื่น)

วิธีทำ จาก $(xy^3 + y)dx + x dy = 0$

จะได้ $xy^3 dx + (y dx + x dy) = 0$

$xy^3 dx + d(xy) = 0$

$\frac{1}{x^2} dx + \frac{d(xy)}{(xy)^3} = 0$

คำตอบคือ $-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2y^2} = c$

หรือ $\frac{2}{2xy} + 1 + Cx^2y^2 = 0$

แบบฝึกหัด 2.6

จงแก้สมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $x dy - y dx = (1 + y^2)dy$

2. $y dx - x dy = xy^3 dy$

3. $x dy = (x^5 + x^3y^2 + y)dx$

4. $(y + x)dy = (y - x)dx$

5. $x dy = (y + x^2 + 9y^2)dx$

6. $x dy + y dx + 3x^3y^4 dy = 0$

7. $(x^3 + xy^2 - y)dx + (y^3 + x^2y + x)dy = 0$

(ข้อแนะ : ดึงตัวร่วมของ $x^3 + xy^2$ และ $y^3 + x^2y$)

8. $(3x + 2y^2)dx + 2xy dy = 0$

9. $(2x^3 - y)dx + x dy = 0 ; y(1) = 1$

10. $(y^2 \cos x - y)dx + (x + y^2)dy = 0$

11. $(x + x^3 \sin 2y)dy - 2ydx = 0$

12. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin y}{x \cos y - \sin^2 y} ; y(0) = \frac{\pi}{2}$

13. $(2y \sin x - \cos^3 x)dx + \cos x dy = 0$

14. $\frac{dy}{dx} + \frac{4y}{x} = x$

15. $\frac{dx}{dy} = \frac{y^3 - 3x}{y}$

16. $\frac{dI}{dt} = \frac{t - tI}{t^2 + 1} ; I(0) = 0$

17. $(y^3 + 2e^x y)dx + (e^x + 3y^2)dy = 0$

18. $\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 \cot x + \sin x \cos x}{2y}$

19. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2y + y^3}$

20. $(3x^2 + y + 3x^3y)dx + x dy = 0$

21. $(2x^2 + 2xy^2)dx + (x^2y + 2y^2 + 3y^3)dy = 0$

22. จงแสดงว่า ถ้าสมการ $M dx + N dy = 0$ ที่ $\frac{1}{xM - yN} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) = F(xy)$

แล้วตัวประกอบเพื่ออินทิเกรต ได้แก่ $e^{\int F(u)du}$ เมื่อ $u = xy$ และจงแก้สมการ

$(y^2 + xy + 1)dx + (x^2 + xy + 1)dy = 0$

23. จงระบุลักษณะของสมการ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ ที่จะมีตัวประกอบเพื่ออินทิเกรต

เป็นฟังก์ชันของผลบวก $x + y$

จากนั้นจงแก้สมการ $(5x^2 + 2xy + 3y^3)dx + 3(x^2 + xy + 2y^2)dy = 0$

24. จงแก้สมการต่อไปนี้

ก. $(2y^2 + 4xy)dx + (4xy + 3x^3)dy = 0$

ข. $x(4y dx + 2x dy) + y(3y dx + 5x dy) = 0$

ค. $(8y dx + 8x dy) + x^2 y (4y dx + 5x dy) = 0$

ง. $x^3 y (2y dx + x dy) + (5y dx + 7x dy) = 0$

25. สมการเชิงอนุพันธ์ของเส้นโค้งหนึ่ง คือ $y' = (x + y) / x$

จงหาสมการของโค้งหนึ่งในชุดเส้นโค้งนั้น ซึ่งผ่านจุด (3, 0)

คำตอบแบบฝึกหัด 2.6

1. $\frac{-x}{y} = -\frac{1}{y} + y + c$

3. $\arctan \frac{y}{x} = \frac{1}{4}x^4 + c$

5. $\arctan \frac{3y}{x} = 3x + c$

7. $x^2 + y^2 + 2\arctan \frac{y}{x} = c$

9. $y = 2x - x^3$

11. $x^2 (c + \cos 2y) = 2y$

13. $y = (x + c)\cos^2 x$

15. $6xy^3 - y^6 = c$

17. $y^3 e^{2x} + ye^{2x} = c$

19. $x^2 + y^2 + 1 = ce^{y^2}$

21. $(x^2 + y^2)\sqrt{1+y^2} = c$

23. $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = g(x+y)$, คำตอบ $x^5 + 3x^4y + x^3y^3 + 3x^3y^2 + 3x^2y^4 + x^2y^3 + 3xy^5 + y^6 = c$

24. ก. $x^2y^4 + x^4y^3 = c$

ค. $4x^2y^2 + x^4y^5 = c$

25. $y = x \ln \left| \frac{x}{3} \right|$

2. $\ln \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{1}{3}y^3 + c$

4. $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{x}{y} + c$

6. $\mu = \frac{1}{x^3y^3}, -\frac{1}{2x^2y^2} + \frac{3}{2}y^2 = c$

8. $x^3 + x^2y^2 = c$

10. $y^2 - x = y(c - \sin x)$

12. $x = \left(\frac{\pi}{2} - y \right) \sin y$

14. $6xy^4 - x^6 = c$

16. $I = 1 - \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$

18. $y^2 + \sin^2 x = c \sin^3 x$

20. $e^{x^3}(1 + xy) = c$

22. $e^{xy}(x + y) = c$

ข. $x^4y^2 + x^3y^5 = c$

ง. $x^3y^3 - 2 = cx^{5/3}y^{7/3}$

2.7 สมการเชิงเส้นอันดับ 1

รูปสมการเชิงเส้น (ใน y) ที่ใช้สำหรับแก้สมการ คือ

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad \dots\dots\dots (1)$$

ตัวอย่าง 2.7.1 ต่อไปนี้เป็นสมการเชิงเส้นอันดับ 1

1. $\frac{dy}{dx} + 5xy = e^{-x^2}$ เชิงเส้นใน y , $P = 5x$ และ $Q = e^{-x^2}$
2. $\frac{dy}{dx} - 8y = 2e^x$ เชิงเส้นใน y , $P = -8$ และ $Q = 2e^x$
3. $x\frac{dy}{dx} + 3y = x^2$ เชิงเส้นใน y จัดรูป (1) ได้ $P = \frac{3}{x}$ และ $Q = x$
4. $y' = \frac{1}{x-3y}$ มิใช่สมการเชิงเส้นใน y แต่จัดรูปใหม่ได้ดังนี้
 $\frac{dx}{dy} = x - 3y$ เป็นสมการเชิงเส้นใน x มี $P(y) = -1$, $Q(y) = -3y$

การแก้สมการเชิงเส้นอันดับ 1

เราจัดรูปสมการเชิงเส้นได้เป็น $dy + P(x)y dx = Q(x)dx \quad \dots\dots\dots (2)$

พิจารณากรณีเฉพาะ $dy + P(x)y dx = 0$

จะได้ $\frac{dy}{y} = -P(x)dx$

คำตอบ คือ $\ln|y| = -\int P(x)dx$

หรือ $ye^{\int Pdx} = k$ สำหรับค่าคงตัว k บางค่า

จะได้ $d(ye^{\int Pdx}) = 0$

นั่นคือ $(dy)e^{\int Pdx} + ye^{\int Pdx} Pdx = 0$

หรือ $e^{\int Pdx} [dy + Py dx] = 0$

ดังนั้น $e^{\int Pdx}$ เป็นตัวประกอบเพื่ออินทิเกรตของ $dy + Py dx$ ซึ่งอยู่ซ้ายมือของ (2)

อนึ่ง $e^{\int Pdx}$ เป็นฟังก์ชันของ x

ดังนั้น $e^{\int Pdx}$ เป็นตัวประกอบเพื่ออินทิเกรตของสมการ (2) เมื่อคูณสมการ (2) จะได้

$$e^{\int Pdx} [dy + Py dx] = Qe^{\int Pdx} dx$$

$$d(ye^{\int Pdx}) = Qe^{\int Pdx} dx$$

เราได้คำตอบรูปทั่วไป คือ $ye^{\int Pdx} = \int Qe^{\int Pdx} dx$

ข้อสังเกต เนื่องจากมี I.F. เดียวกันเพียงพอนในการแก้สมการจึงเลือก I.F. มา 1 ฟังก์ชัน
 จาก $e^{\int Pdx}$

ตัวอย่าง 2.7.2 จงแก้สมการ

ก. $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x$

ข. $\frac{dy}{dx} + xy = x$

วิธีทำ ก. ในที่นี้ $P = \frac{2}{x}$ ดังนั้น I.F. ได้แก่ $e^{\int \frac{2}{x} dx}$ เราใช้ $e^{2 \ln|x|} = x^2$

$$\text{ดังนั้น เราได้คำตอบ } yx^2 = \int x^3 dx$$

$$\text{หรือ } \frac{2}{x} y = \frac{x^4}{4} + c$$

ข. ในที่นี้ $P = x$ I.F. ได้แก่ $e^{\int x dx}$ เราใช้ $e^{x^2/2}$

$$\text{คำตอบคือ } y e^{x^2/2} = \int x e^{x^2/2} dx$$

$$= e^{x^2/2} + c$$

$$\text{หรือ } y = 1 + c e^{-x^2/2}$$

ตัวอย่าง 2.7.3 จงแก้สมการ $y dx + (3x - xy + 2)dy = 0$

วิธีทำ (ควรลองทำด้วยวิธีการต่าง ๆ ดังกล่าวตอนต้น ทั้งหมดเสียก่อน) เราจัดเป็นสมการเชิงเส้นใน x ได้ดังนี้

$$y \frac{dx}{dy} + (3 - y)x = -2$$

$$\text{หรือ } \frac{dx}{dy} + \left(\frac{3}{y} - 1\right)x = \frac{-2}{y}$$

I.F. ได้แก่ $e^{\int \left(\frac{3}{y} - 1\right) dy}$ เลือกใช้ $y^3 e^{-y}$

$$\text{คำตอบทั่วไป } xy^3 e^{-y} = \int -\frac{2}{y} y^3 e^{-y} dy$$

$$= 2 \int (-y) e^{2-y} d(-y) + c$$

$$= 2(y e^{2-y} + 2y e^{-y} + 2e^{-y}) + c$$

$$\text{หรือ } xy^3 = 2y^2 + 4y + 4 + ce^y$$

สมการแบร์นูลลี (Bernoulli's Equations)

$$\text{รูปสมการ คือ } \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \quad n \neq 0, 1$$

จงสังเกตว่า ถ้า $n = 0$ จะได้สมการเชิงเส้น และถ้า $n = 1$ จะได้สมการเชิงเส้น

$$\frac{dy}{dx} + (P - Q)y = 0$$

สมการแบร์นูลลีจะเปลี่ยนเป็นสมการเชิงเส้นของตัวแปรอื่นได้ ดังต่อไปนี้

$$\text{หารตลอดด้วย } y^n \text{ จะได้ } y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x) \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{ให้ } v = y^{1-n} \text{ จะได้ } \frac{dv}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx} \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{คูณ (1) ด้วย } 1-n \text{ แล้วแทนค่า (2) ในสมการที่ได้จะมีรูป } \frac{dv}{dx} + (1-n)Pv = (1-n)Q$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้นใน v

ดังนั้น สรุปขั้นตอนการแก้สมการแบร์นูลลีได้ดังนี้

ขั้น 1 หารสมการแบร์นูลลีด้วย y^n

ขั้น 2 แทนค่า $v = y^{1-n}$ ผลลัพธ์เป็นสมการเชิงเส้นใน v

ขั้น 3 แก้สมการที่ได้ในขั้น 2

ขั้น 4 แทนค่ากลับคืน $v = y^{1-n}$ จะได้คำตอบตามต้องการ

ตัวอย่าง 2.7.4 จงแก้สมการ $y' + y = xy^2$

วิธีทำ จัดสมการใหม่ได้ $-y^{-2} y' - y^{-1} = -x$

ให้ $v = y^{-1}$ จะได้ $\frac{dv}{dx} = -y^{-2} \frac{dy}{dx}$

แทนค่าจะได้ $\frac{dv}{dx} - v = -x$

I.F. ได้แก่ $e^{\int -dx}$ เราใช้ e^{-x}

และคำตอบคือ $ve^{-x} = \int -xe^{-x} dx$

$$v = \frac{-x}{e^{-x}} + \frac{-1}{e^{-x}} + c$$

หรือ $v = x + 1 + ce^x$

แทนค่า $v = \frac{1}{y}$, $\frac{1}{y} = x + 1 + ce^x$

สมการแบร์นูลลีเป็นตัวอย่างสมการแบบหนึ่งที่ยังจัดเข้ารูปสมการเชิงเส้นได้ มีสมการอื่น ๆ อีกที่ยังจัดเป็นสมการเชิงเส้นได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.7.5 จงเปลี่ยนตัวแปรตามความเหมาะสมเพื่อแก้สมการต่อไปนี้

(ก) $2xy \frac{dy}{dx} + (1+x)y^2 = e^x$

(ข) $\cos y \frac{dy}{dx} + ax \sin y = bx^2$

(ค) $\frac{dy}{dx} + \frac{y+3}{x} = x^2(y+3)^2$

(ง) $xy' = 2x^2y + y \ln y$

(จ) $xy'' - 3y' = 4x^2$

เฉลย (ก) ใช้ $v = y^2$

(ข) ใช้ $v = \sin y$

(ค) ใช้ $v = y + 3$ จะได้สมการแบร์นูลลี จากนั้นทำเป็นสมการเชิงเส้น

(ง) หาคอดด้วย y ได้ $x \frac{1}{y} y' = 2x^2 + \ln y$ จากนั้นใช้ $v = \ln y$

ซึ่ง $\frac{dv}{dx} = \frac{1}{y} y'$

(จ) ให้ $v = y'$ แก้สมการหาค่า v จากนั้นแทนค่ากลับคืนจะได้สมการเชิงเส้นอีกครั้งหนึ่ง

แบบฝึกหัด 2.7 จงแก้สมการเชิงอนุพันธ์

1. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 1$
2. $xy' + 3y = x^2$
3. $y^2 \frac{dx}{dy} + xy = 2y^2 + 1$
4. $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = x^2 \sin 3x$
5. $\frac{dI}{dt} + 3I = e^{-2t}$; $I(0) = 5$
6. $y' + y \cot x = \cos x$
7. $y' = \frac{1}{x-3y}$
8. $y' + y = 2xe^{-x} + x^2$
9. $y' + y = \frac{1}{1+e^{2x}}$
10. $(2y - x^3)dx = x dy$
11. $y' = 1 + 3y \tan x$
12. $(e^y - 2xy)y' = y^2$
13. $L \frac{di}{dt} + Ri = E \sin \omega t$ เมื่อ $t = 0$ ได้ $i = 0$

จงแปลงสมการต่อไปนี้ให้เป็นสมการเชิงเส้น และหาคำตอบทั่วไป

14. $y' - y = xy^2$
15. $xy' + y = x^4 y^3$
16. $xy^2 y' + y^3 = x \cos x$
17. $xy'' - 3y' = 4x^2$
18. $xy' = 2x^2 y + y \ln y$
19. $xy' + 3 = 4xe^{-y}$; $y(2) = 0$
20. $f'(y) \frac{dy}{dx} + f(y) P(x) = Q(x)$
21. สมการ $y' = q_0(x) + q_1(x)y + q_2(x)y^2$

ซึ่ง $q_2 \neq 0$ เรียกว่า สมการริคคาตี (Riccati equation) เป็นเกียรติแก่นักคณิตศาสตร์ชาวอิตาลี ชื่อฟานเคอร์นี ริคคาตี (ค.ศ. 1676 – 1754)

ก. จงแสดงว่า ถ้าแทน $w = \frac{1}{y}$ ในสมการริคคาตี จะได้สมการริคคาตีใหม่เป็น

$$w' = -q_2(x) - q_1(x)w - q_0(x)w^2$$

ข. ถ้าทราบว่า $y_1(x)$ เป็นคำตอบเฉพาะของสมการริคคาตี จงแสดงว่าเมื่อแทนค่า

$$y = y_1 + \frac{1}{u}$$

จะได้สมการเชิงเส้นใน u

คำตอบเฉพาะของสมการริคคาตีอยู่ในรูป $y = ax^b$ หรือ $y = ae^{bx}$

คำตอบแบบฝึกหัด 2.7

1. $x^2 - 2xy = c$
2. $x^5 - 5x^3 y = c$
3. $xy = y^2 + \ln|y| + c$
4. $x^2 \cos 3x + 3y = cx^2$

$$5. I = e^{-2t} + 4e^{-3t}$$

$$6. 2y \sin x - \sin^2 x = c$$

$$7. x - 3y - 3 = ce^y$$

$$8. y = x^2 e^{-x} + x^2 - 2x + 2 + ce^{-x}$$

$$9. y = e^{-x} \arctan e^x + ce^{-x}$$

$$10. y = -x^3 + cx^2$$

$$11. 3y \cos x = c + 3\sin x - \sin^3 x$$

$$12. xy^2 = e^y + c$$

$$13. i = \frac{E}{R^2 + \omega^2 L^2} [R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t + \omega L e^{-\frac{Rt}{L}}]$$

$$14. y = (1 - x + ce^{-x-1})$$

$$15. y^{-2} = -x^4 + cx^2$$

$$16. y^3 = 3 \sin x + \frac{9 \cos x}{x} - \frac{18 \sin x}{x^2} - \frac{18 \cos x}{x^3} + \frac{c}{x^3}$$

$$17. y = c_1 x^4 - \frac{4}{3} x^3 + c_2$$

$$18. \ln y = 2x^2 + cx$$

$$19. y = \ln(x - 8x^{-3})$$

$$20. f(y)e^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx$$

2.8 สมการในรูป $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right), a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 \neq 0$

ตัวอย่าง 2.8.1 ตัวอย่างสมการ $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$ (1)

$$1. \frac{dy}{dx} = 4\left(\frac{x-y+2}{2x+y-1}\right)^2 - \left(\frac{x-y+2}{2x+y-1}\right) + 3$$

ข้อนี้ $a_1 = 1, b_1 = -1, c_1 = 2, a_2 = 2, b_2 = 1, c_2 = -1$

$$2. \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x+y+2}$$

ข้อนี้ $a_1 = b_1 = 1, c_1 = 0, a_2 = b_2 = 1, c_2 = 2$

$$3. \frac{dy}{dx} = \cos(x+y)$$

ข้อนี้ $a_1 = b_1 = 1, c_1 = 0, a_2 = b_2 = 0, c_2 = 1$

$$4. (2x - 3y + 4)dx + (3x - 2y + 1)dy = 0$$

ข้อนี้ $a_1 = 2, b_1 = -3, c_1 = 4, a_2 = 3, b_2 = -2, c_2 = 1$

แนวทางการแก้สมการ

กรณี 1 $a_1 b_2 = a_2 b_1$

ตัวอย่างในกรณีนี้ได้แก่ ข้อ 2, 3 ตัวอย่าง 2.8.1 ในกรณีนี้ เราสามารถเขียนสมการ (1)

ได้ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k_1(\alpha x + \beta y) + c_1}{k_2(\alpha x + \beta y) + c_2}\right) \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{เราให้ } u = \alpha x + \beta y \quad \dots\dots\dots(3)$$

ข้างขวาของสมการ (2) จะเป็นฟังก์ชันของ u เราต้องการจัดข้างซ้ายของสมการให้มี u กับ x หรือ y ตัวใดตัวหนึ่งตามที่เป็นไปได้

เนื่องจาก $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ ดังนั้น $\alpha \neq 0$ หรือ $\beta \neq 0$

$$\text{ถ้า } \beta \neq 0 \text{ เราได้จาก (3) ว่า } y = \frac{u}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}x \text{ และ } dy = \frac{du}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}dx$$

ดังนั้น สมการ (2) จัดรูปได้เป็น

$$\frac{du}{\beta} = \left[\frac{\alpha}{\beta} + f\left(\frac{k_1 u + c_1}{k_2 u + c_2}\right) \right] dx$$

ซึ่งเป็นสมการแบบตัวแปรได้

$$\text{ถ้า } \alpha \neq 0 \text{ เราได้จาก (3) ว่า } x = \frac{u}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}y \text{ และ } dx = \frac{du}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}dy$$

แทนค่าใน (2) จัดเป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้เช่นกัน

ดังนั้น ในกรณี 1 เราสามารถแก้สมการโดยการแทนค่า $u = \alpha x + \beta y$ ซึ่งเป็นตัวหารร่วมของ $a_1 x + b_1 y$ กับ $a_2 x + b_2 y$ เพื่อให้ได้สมการแบบแยกตัวแปรได้

ข้อสังเกต ในกรณี 1 ส่วนของสัมประสิทธิ์ของ dx, dy ที่เป็นตัวแปรทั้งสองส่วนนั้นมี ส่วนหนึ่งเป็น k เท่าของอีกส่วนหนึ่ง

ตัวอย่าง 2.8.2 จงแก้สมการ

$$1. (x + y + 1)dx + (2x + 2y + 1)dy = 0$$

$$2. y' + \sin^2(x + y) = 0$$

วิธีทำ 1. ให้ $u = x + y \therefore y = u - x$ และ $dy = du - dx$

แทนค่าในโจทย์

$$(u + 1)dx + (2u + 1)(du - dx) = 0$$

$$-u dx + (2u + 1)du = 0$$

$$dx = \frac{2u+1}{u} du$$

$$= \left(2 + \frac{1}{u}\right) du$$

$$x = 2u + \ln|u| + k$$

$$\text{เขียนได้ว่า } u = Ce^{x-2u}$$

$$\text{แทนค่ากลับคืนได้ } x + y = Ce^{-2y-x}$$

2. จัดรูปสมการได้เป็น $\frac{dy}{dx} = -\sin^2(x+y)$

ให้ $u = x + y$ จะได้ $y = u - x$ และ $dy = du - dx$

แทนค่าในโจทย์

$$\begin{aligned} du - dx &= -\sin^2 u \, dx \\ du &= (1 - \sin^2 u) dx \\ &= \cos^2 u \, dx \\ \sec^2 u \, du &= dx \\ \tan u &= x + c \end{aligned}$$

แทนค่ากลับคืน

$$\tan(x+y) = x + c$$

กรณี 2 $a_1 b_2 \neq a_2 b_1$

เราทราบว่าจะมีคำตอบ (h, k) ซึ่ง

$$a_1 h + b_1 k + c_1 = 0$$

$$a_2 h + b_2 k + c_2 = 0$$

ดังนั้น โดยการแปลง (transformation) $x = X + h, y = Y + k$

เราได้ $dy = dY$ และ $dx = dX$

$$\begin{aligned} \text{นอกจากนั้น } f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right) &= f\left(\frac{a_1 (X+h) + b_1 (Y+k) + c_1}{a_2 (X+h) + b_2 (Y+k) + c_2}\right) \\ &= f\left(\frac{a_1 X + b_1 Y + a_1 h + b_1 k + c_1}{a_2 X + b_2 Y + a_2 h + b_2 k + c_2}\right) \\ &= f\left(\frac{a_1 X + b_1 Y}{a_2 X + b_2 Y}\right) \end{aligned}$$

จะได้รูปสมการเชิงอนุพันธ์ในระนาบ XY เป็น

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1 X + b_1 Y}{a_2 X + b_2 Y}\right)$$

$$\text{หรือ } f\left(\frac{a_1 X + b_1 Y}{a_2 X + b_2 Y}\right) dX - dY = 0$$

ซึ่งเป็นสมการสัมประสิทธิ์เอกพันธ์

ดังนั้นในกรณี 2 นี้ $a_1 b_2 \neq a_2 b_1$ และเรามีขั้นตอนการแก้สมการดังนี้

$$\text{ขั้น 1 หาจุดตัดของสมการ } a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

สมมติได้ จุด (h, k)

ขั้น 2 แทนค่า $x = X + h, y = Y + k$ ผลลัพธ์จะเป็นสมการ
สัมประสิทธิ์เอกพันธ์ของตัวแปร X, Y

ขั้น 3 ให้ $Y = vX$ (หรือ $X = vY$) ผลลัพธ์จะเป็นสมการแบบ
แยกตัวแปรได้

ขั้น 4 แก้สมการที่ได้ในขั้น 3

ขั้น 5 แทนค่ากลับคืน $v = \frac{Y}{X}$ (หรือ $v = \frac{X}{Y}$) คำตอบมีตัวแปร X, Y

ขั้น 6 แทนค่า $X = x - h, Y = y - k$ จะได้คำตอบตามต้องการ

ตัวอย่าง 2.8.3 จงแก้สมการ $(2x - 3y + 4)dx + (3x - 2y + 1)dy = 0$

วิธีทำ เส้นตรง $2x - 3y + 4 = 0$ กับ $3x - 2y + 1 = 0$ ตัดกันที่จุด $(1, 2)$

ให้ $x = X + 1, y = Y + 2$

จะได้ $dx = dX, dy = dY$

แทนค่าเหล่านี้ในสมการ โจทย์จะได้

$$(2X - 3Y)dX + (3X - 2Y)dY = 0$$

ให้ $Y = vX, dY = v dX + X dv$

$$(2X - 3vX)dX + (3X - 2vX)(v dX + X dv) = 0$$

$$(2 - 3v)dX + (3 - 2v)(v dX + X dv) = 0$$

$$(2 - 2v)^2 dX + (3 - 2v)X dv = 0$$

$$\frac{dX}{X} + \frac{3 - 2v}{2(1 - v^2)} dv = 0$$

$$\frac{dX}{X} + \left(\frac{1}{4(1 - v)} + \frac{5}{4(1 + v)} \right) dv = 0$$

$$\ln |X| + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{(1 + v)^5}{1 - v} \right| = k$$

เขียนได้ว่า $X^4 (1 + v)^5 = c(1 - v)$

แทนค่า $v = \frac{Y}{X}, X^4 (1 + \frac{Y}{X})^5 = c(1 - \frac{Y}{X})$
 $(X + Y)^5 = c(X - Y)$

แทนค่า $X = x - 1$ และ $Y = y - 2$ เราได้ $(x + y - 3)^5 = c(x - y + 1)$

ตัวอย่าง 2.8.4 จงแก้สมการต่อไปนี้

$$(1) \frac{dy}{dx} = 36 \left(\frac{x + y + 1}{11x + y - 19} \right)^2$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{3x - 15y + 1}{20y - 4x + 4}$$

วิธีทำ (1) เส้นตรง $x + y + 1 = 0$ และ $11x + y - 19 = 0$ ตัดกันที่จุด $(2, -3)$

ให้ $x = X + 2$ และ $y = Y - 3$ จะได้

$$\frac{dY}{dX} = 36 \left(\frac{X+Y}{11X+Y} \right)^2$$

$$\text{ให้ } Y = vX$$

$$vdX + Xdv = 36 \left(\frac{1+v}{11+v} \right)^2 dX$$

$$\left[36 \left(\frac{1+v}{11+v} \right)^2 - v \right] dX = X dv$$

$$\frac{dX}{X} = \frac{dv}{36 \left(\frac{1+v}{11+v} \right)^2 - v}$$

$$= \frac{-(11+v)^2 dv}{v^3 - 14v^2 + 49v - 36}$$

$$= \left(-\frac{6}{v-1} + \frac{15}{v-4} - \frac{10}{v-9} \right) dv$$

$$\therefore \ln |X| = -6 \ln |v-1| + 15 \ln |v-4| - 10 \ln |v-9| + \ln A$$

$$\text{เขียนได้ว่า } X = \frac{c(v-4)^{15}}{(v-1)^6 (v-9)^{10}}$$

$$\text{แทนค่า } v = \frac{Y}{X} \text{ จัดรูปใหม่จะได้ } X^{-15} (Y-X)^6 (Y-9X)^{10} = cX^{-15} (Y-4X)^{15}$$

$$\text{แทนค่า } X = x-2 \text{ และ } Y = y+3 \text{ ได้}$$

$$(y-x+5)^6 (y-9x+21)^{10} = c(y-4x+11)^{15}$$

$$(2) \text{ จัดรูปใหม่ได้ } \frac{dy}{dx} = -\frac{3(x-5y)+1}{4(x-5y)-4}$$

$$\text{ให้ } u = x-5y \text{ ดังนั้น } x = u+5y \text{ และ } dx = du+5dy$$

แทนค่าในสมการบนจะได้

$$dy = -\frac{3u+1}{4u-4} (du+5dy)$$

$$\left(1 + \frac{15u+5}{4u-4} \right) dy = -\frac{3u+1}{4u-4} du$$

$$dy = -\frac{3u+1}{19u+1} du$$

$$y = -\frac{3}{19}u - \frac{16}{(19)^2} \ln |19u+1| + \ln |c_1|$$

$$361y = -57u - 16 \ln |19u+1| + \ln |c_2|$$

$$(19u+1)^{16} = ce^{-57u-361y}$$

$$(19x-95y+1)^{16} e^{57x+76y} = c$$

ในบางโอกาส เราอาจพบปัญหาที่ไม่สามารถแก้ได้ตรง ๆ ต้องอาศัยจินตนาการของรูปการแทนค่า ดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$\text{ตัวอย่าง 2.8.5 จงแก้สมการ } 3x^5 dx - y(y-x)^2 dy = 0$$

(ลองทดสอบแบบสมการตั้งแต่แยกตัวแปรได้จนถึงสมการรูปสุดท้าย จากนั้น

ลองหา I.F. ถ้าไม่สำเร็จ ดูวิธีทำต่อไปนี้)

$$\text{จัดรูปสมการได้เป็น } x^3 dx - \frac{1}{2}(y^2 - x^3)dy = 0$$

$$\text{ให้ } u = x^3, v = y^2 \text{ จะได้สมการ}$$

$$u du - \frac{1}{2}(v - u)dv = 0$$

$$\text{สมการนี้เป็นสมการสัมประสิทธิ์เอกพันธ์ ให้ } u = vw$$

$$\text{จะได้ } wv(wdv + vdw) - \frac{1}{2}(v - vw)dv = 0$$

$$(2w^2 + w - 1)dv + 2wv dw = 0$$

$$\frac{dv}{v} + \frac{2wdw}{2w^2 + w - 1} = 0$$

$$\frac{dv}{v} + \left(\frac{2}{3(2w-1)} + \frac{2}{3(w+1)} \right) dw = 0$$

$$\frac{1}{3} \ln \frac{(2w-1)^2}{(w+1)^3} = c$$

$$\text{แทนค่ากลับคืน } w = \frac{u}{v}, \quad (2u - v)(u + v)^2 = c$$

$$\text{แทนค่ากลับคืน } u = x^3, v = y^2, (2x^3 - y^2)(x^3 + y^2)^2 = c$$

แบบฝึกหัด 2.8

จงแก้สมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $(2x + 3y + 1)dx + (5 - 3x + 2y)dy = 0$

2. $(2x + 3y + 4)dx - (4x + 6y + 1)dy = 0$

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+4}{x-y-6}$

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+4}{x+y-6}$

5. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x+y-1}{x+y+1}}$

6. $y' = \tan^2(x+y)$

7. $y' = (x+y+1)^{-2}$

8. $(2x^2 + 3y^2 - 7)x dx - (3x^2 + 2y^2 - 8)y dy = 0$

คำตอบแบบฝึกหัด 2.8

1. $\ln |x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2| - 3 \arctan \frac{y+1}{x-1} = c$

2. $\ln |2x + 3y + 2| = 2y - x + c$

3. $\arctan \frac{y+5}{x-1} = \ln \sqrt{(x-1)^2 + (y+5)^2} + c$

4. $y - x = 5 \ln |x + y - 1| + c$

5. $v^2 + 2v - v\sqrt{v^2 - 1} + \ln(v - \sqrt{v^2 - 1}) = 4x + c$ โดย $v = x + y$

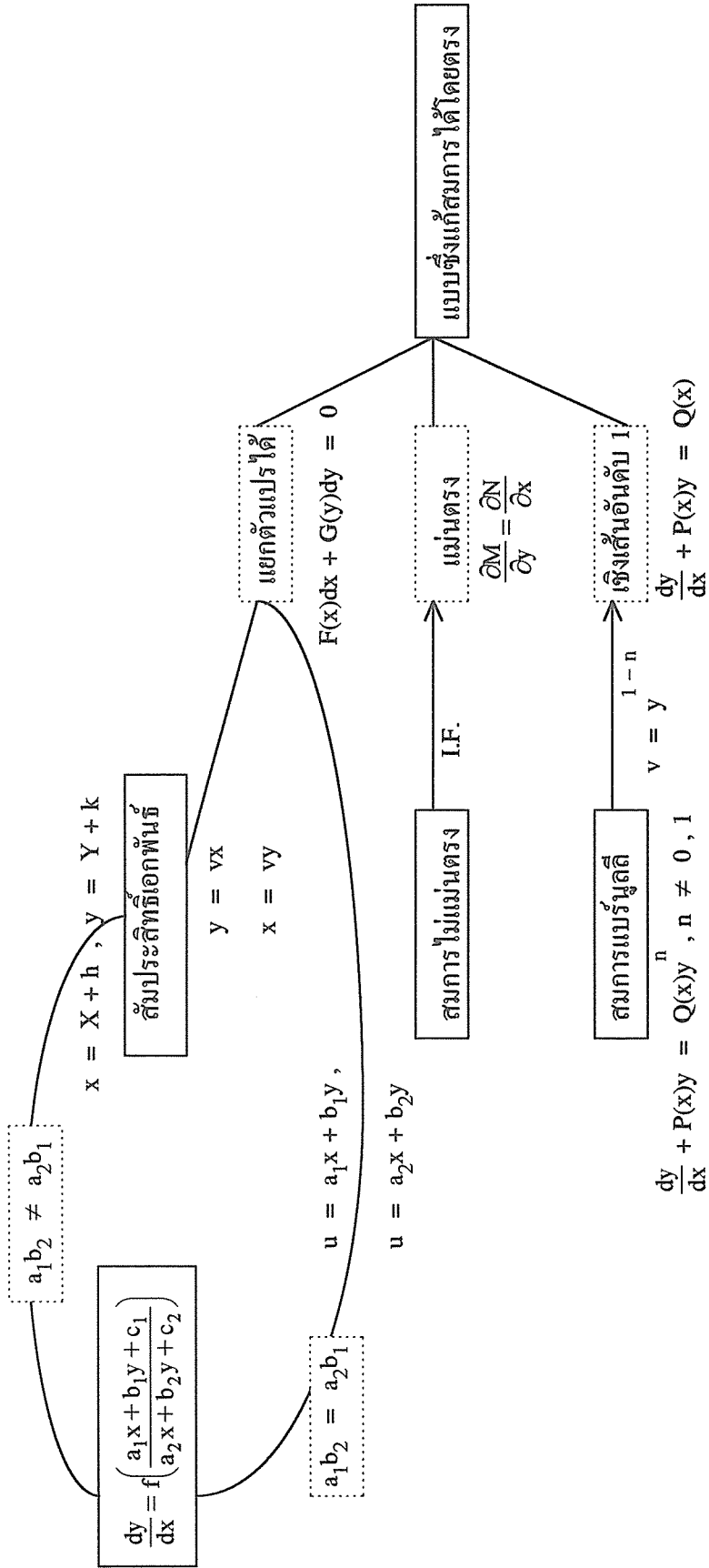
6. $2y - 2x + \sin 2(x+y) = c$

7. $\tan(y+c) = x+y+1$

8. $(x^2 - y^2 - 1)^5 = C(x^2 + y^2 - 3)$

2.9

แบบและการแก้สมการ อันดับ 1 ดีกรี 1



จากแผนภูมิ แบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่แก้ได้โดยตรงไม่ต้องผ่านการแปลง คือ

1. แบบแยกตัวแปรได้ เรามักพบสมการในรูป

$$\begin{aligned} f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy &= 0 \\ \text{ซึ่งแยกตัวแปรได้เป็น } \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy &= 0 \\ \text{คำตอบคือ } \int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy &= c \end{aligned}$$

2. สมการแม่นตรง คือ สมการ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ ซึ่ง $M_y - N_x = 0$

คำตอบอยู่ในรูป $F(x, y) = c$ ซึ่งหาได้หลายวิธี วิธีหนึ่งคืออินทิเกรต M เทียบกับ x ได้ F ที่ส่วนหนึ่งเป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า $h(y)$ เราหา $h(y)$ อีกครั้ง

3. สมการเชิงเส้นอันดับ 1 ซึ่งอาจมีรูป

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + P(x)y &= Q(x) \\ \text{และคำตอบคือ } ye^{\int P dx} &= \int Qe^{\int P dx} dx \end{aligned}$$

แบบสมการทั้งสาม จึงนับเป็นแบบพื้นฐานที่สำคัญ และต้องทำความเข้าใจ ส่วนแบบอื่น เช่น สมการสัมประสิทธิ์เอกพันธ์ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ ซึ่ง M, N เป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรีเท่ากัน ตามปกติต้องทำเป็นสมการแยกตัวแปรได้ โดยการแทนค่า $x = vy$ หรือแทนค่า $y = vx$ จึงแก้ได้ แต่ต้องไม่ลืมว่าต้องแทนค่ากลับคืนหลังจากแก้แล้ว

สมการไม่แม่นตรง นั้น $M_y - N_x \neq 0$ ถ้ามีคำตอบ จะทำเป็นสมการแม่นตรงได้โดยหา I.F. คูณ วิธีหา I.F. ได้แก่ การคูณให้ได้รูปผลต่างอนุพัทธ์ หรือการใช้ I.F.

$$\int \frac{f(x)dx}{e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}}, e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx} \text{ กรณี } \frac{M_y - N_x}{N} = f(x) \text{ และ } \frac{M_y - N_x}{M} = g(y) \text{ ตามลำดับ}$$

สมการแบบอื่น ๆ รวมทั้งสมการแบร์นูลลี และ $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ ทำได้โดยวิธีแทนค่า

แบบฝึกหัด 2.10 (แบบฝึกหัดระคน)

1. $y' = e^{2x-y}$
2. $(x+y)dx + x dy = 0$
3. $y^2 dx - x(2x+3y)dy = 0$
4. $\frac{dx}{dt} = \cos x \cos t$
5. $[1 + (x+y)^2]dx + [1 + x(x+y)]dy = 0$
6. $y' + y = 2x + 1$
7. $y' = \frac{(x^2-1)}{y^2+1}$
8. $\left[\frac{y}{xy+1} + x^2\right]dx + \frac{xdy}{xy+1} = 0$
9. $y' = \frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{y}$

10. $(2x \sin xy + x^2 y \cos xy)dx + x^3 \cos xy dy = 0$
11. $y' = y + e^y$
12. $(2x - y)dx + (x + 2y)dy = 0$
13. $(2x + 3y + 1)dx + (2y - 3x + 5)dy = 0$
14. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2}$
15. $y^2 dx = (x^3 - xy)dy$
16. $(x^2 y^3 + y)dx = (x^3 y^2 - x)dy$
17. $x dy + y dx = x \cos x dx$
18. $xy dy = x^2 dy + y^2 dx$
19. $(e^x - 3x^2 y)y' + ye^x = 2xy^3$
20. $(x^2 + y)dx = x dy$
21. $xy' + y = x^2 \cos x$
22. $(6x + 4y + 3)dx + (3x + 2y + 2)dy = 0$
23. $\cos(x + y)dx = x \sin(x + y)dx + x \sin(x + y)dy$
24. $x^2 y'' + xy' = 1$
25. $(y^2 e^{xy} + \cos x)dx + (e^{xy} + xye^{xy})dy = 0$
26. $y' \ln(x - y) = 1 + \ln(x - y)$
27. $y' + 2xy = e^{-x^2}$
28. $(y^2 - 3xy - 2x^2)dx = (x^2 - xy)dy$
29. $(1 + x^2)y' + 2xy = 4x^3$
30. $e^x \sin y dx + e^x \cos y dy = y \sin xy dx + x \sin xy dy$
31. $(xe^y + y - x^2)dy = (2xy - e^y - x)dx$
32. $e^x (1 + x)dx = (xe^x - ye^y)dy$

คำตอบแบบฝึกหัด 2.10

1. $2e^y = e^{2x} + c$
2. $x(x + 2y) = c$
3. $y^2(x + y) = cx$
4. $4 \ln |\sec x + \tan x| = 2t + \sin 2t + c$
5. $y^2 = (x + y)^2 + 2 \ln |x + y| + c$
6. $y = 2x - 1 + ce^{-x}$
7. $y^3 + 3y = x^3 - 3x + c$
8. $(xy + 1)^3 = ce^{-x^3}$
9. $x + \sqrt{x^2 - y^2} = c$
10. $x^2 \sin xy = c$
11. $\int \left(\frac{dy}{y + e^y} \right) = x + c$
12. $x^2 + y^2 = ce^{-\arctan y/x}$
13. $3 \arctan \frac{y+1}{x-1} = \ln[(y+1)^2 + (x-1)^2] + c$
14. $y\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2}) + y^2 = 3x^2 \ln |x| + cx^2$
15. $3y = 2x^2 + cx y^3$
16. $\frac{1}{2x^2 y^2} = \ln \left| \frac{y}{x} \right| + c$
17. $xy = x \sin x + \cos x + c$
18. $y = x \ln |y| + cx$

$$19. y e^x - x^2 y^3 = c$$

$$20. y = x^2 + cx$$

$$21. y = x \sin x + 2 \cos x - 2x^{-1} \sin x + cx^{-1}$$

$$22. (3x + 2y) + \ln(3x + 2y)^2 + x = c$$

$$23. x \cos(x + y) = c$$

$$24. y = \frac{1}{2}(\ln|x|)^2 + c_1 \ln|x| + c_2$$

$$25. y e^{xy} + \sin x = c$$

$$26. (x - y) \ln(x - y) = c - y$$

$$27. y = x e^{-x^2} + c e^{-x^2}$$

$$28. x^2 y^2 - 2x^3 y - x^4 = c$$

$$29. y = x^4 (1 + x^2)^{-1} + c(1 + x^2)^{2-1}$$

$$30. e^x \sin y + \cos xy = c$$

$$31. 2xe^y + x^2 + y^2 - 2x^2 y = c$$

$$32. 2xe^{x-y} + y^2 = c$$

2.10 การตีความทางเรขาคณิตของสมการเชิงอนุพันธ์ อันดับ 1

ถ้า y เป็นฟังก์ชันของ x ความหมายของ $\frac{dy}{dx}$ ทางเรขาคณิต คือ ความชัน ของ โค้ง (ความชันของเส้นตรงสัมผัสโค้ง ณ จุดสัมผัส) ดังนั้น สมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

คือสูตรที่ใช้กำหนดความชันของโค้งของคำตอบที่ผ่านจุด (x, y) ในโดเมนของ F นั้น คือ จากสมการเชิงอนุพันธ์ดังกล่าว เราจะได้ว่า

$$\text{ความชันของโค้ง ณ จุด } (x, y) \text{ คือ } F(x, y)$$

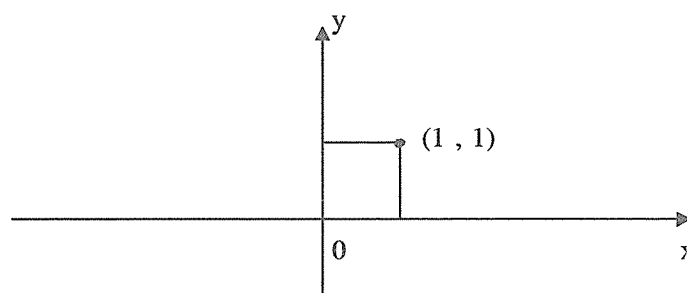
จากสูตรนี้ เราสามารถเขียนกราฟของคำตอบได้คร่าว ๆ โดยไม่ต้องผ่านการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ก่อน ในหัวข้อนี้เราจะได้ศึกษาตัวอย่างการเขียนกราฟ คำตอบ และพึงรู้จักสิ่งที่จะช่วยอำนวยความสะดวกในการเขียนกราฟด้วย ซึ่งได้แก่

1. หน่วยแสดงความชัน (line elements)
2. สนามทิศทาง (direction field)
3. แนวที่ความชันเท่ากัน (isoclines)
4. เส้นโค้งอินทิกรัล (integral curves)

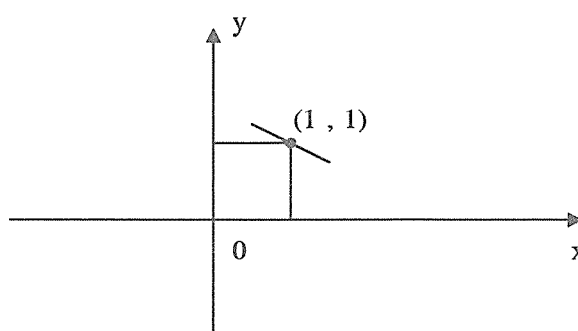
ตัวอย่าง 2.10.1 ศึกษาเขียนกราฟของคำตอบ สำหรับสมการ $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

ลองคำนวณค่าความชัน ณ จุดใดจุดหนึ่ง เช่นจุด $(1, 1)$ จะได้

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1} = -1$$



เราแสดงค่าความชันนี้ โดยการเขียนส่วนของเส้นตรงสั้น ๆ ให้จุด $(1, 1)$ อยู่กลางเส้น มีความชัน -1



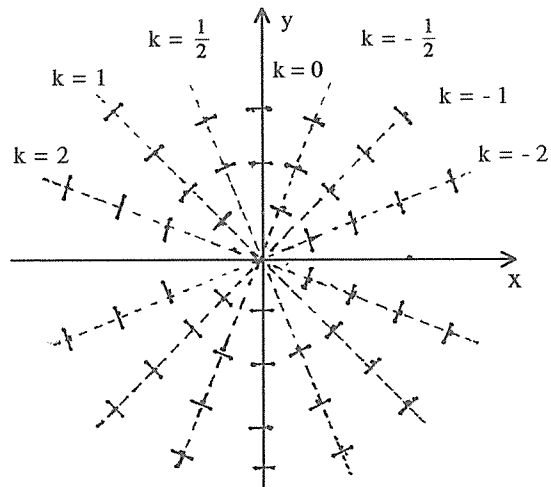
เรียกส่วนของเส้นตรงนี้ว่า หน่วยแสดงความชัน หน่วยแสดงความชันอาจมีความชันต่าง ๆ กันเช่นที่จุด $(2, 1)$ มีความชัน -2 เป็นต้น เซตของหน่วยแสดงความชันทั้งหมดของแต่ละสมการเชิงอนุพันธ์ เรียกว่า สนามทิศทาง ของสมการเชิงอนุพันธ์นั้น

สมมติเราจะเขียนสนามทิศทาง จะเห็นว่าต้องใช้เวลา และความพยายามอย่างมากที่ต้องคำนวณค่าความชัน ณ แต่ละจุด เพื่อเขียนหน่วยแสดงความชัน ให้ได้จำนวนมากพอ เพื่อให้สะดวกยิ่งขึ้น เราจะพิจารณาจุดอื่น ๆ เช่น $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(-1, -1)$ ปรากฏว่าคำนวณค่าความชันจาก $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ ณ จุดเหล่านี้เป็น -1 เหมือนกัน จุดเหล่านี้เรียงรายกันอยู่บนเส้นตรง $y = x$ เราเรียกแนวของจุด (โลโก้ของจุด) ที่ให้ค่าความชันตามสูตรเท่ากันว่า แนวที่ความชันเท่ากัน และแนวที่ความชันเท่ากัน เส้นหนึ่งในตัวอย่างนี้ คือ $y = x$

จงสังเกตด้วยว่า จาก $y = x$ เราได้ $-1 = -\frac{x}{y}$ เราอาจมองว่าสมการนี้เกิดจากการกำหนดเงื่อนไข $\frac{dy}{dx} = -1$ ให้กับสมการ $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ อนึ่ง ถ้าเรากำหนดเงื่อนไขเป็น $\frac{dy}{dx} = k$ (ค่าคงที่ใด ๆ) เราจะได้สมการของแนวที่ความชันเท่ากัน คือ $-\frac{x}{y} = k$ (เส้นตรงผ่านจุดกำเนิด)

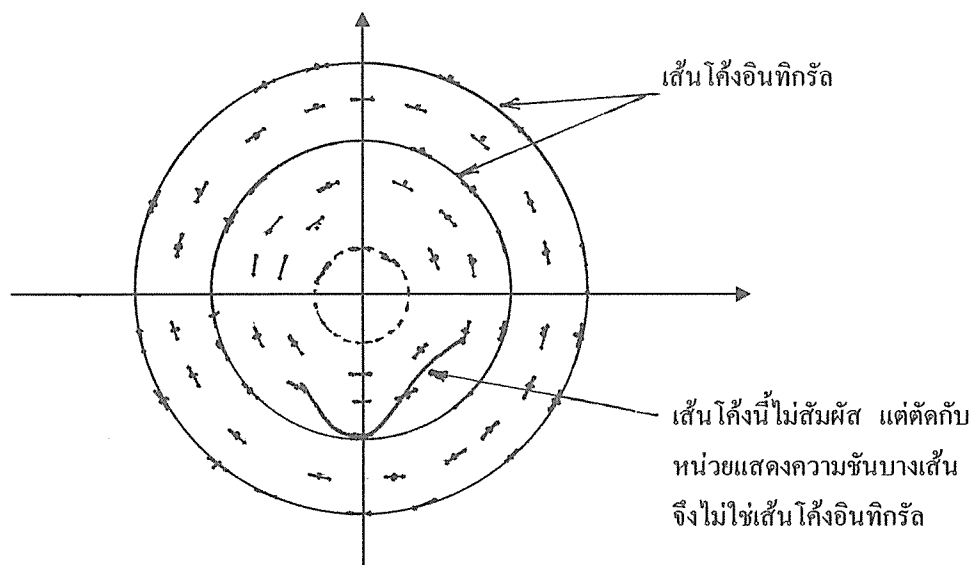
ตัวอย่างแนวที่ความชันที่เกิดขึ้น เมื่อ k มีค่าต่าง ๆ ปรากฏในตาราง

ความชัน (k)	แนวที่ความชันเท่ากัน
0	$x = 0$ (แกน y)
1	$y = -x$
2	$y = -\frac{1}{2}x$
-1	$y = x$
-2	$y = \frac{1}{2}x$
$\frac{1}{2}$	$y = -2x$
$-\frac{1}{2}$	$y = 2x$



เมื่อเราเขียนแนวที่ความชันเท่ากันได้ 1 เส้น เราจะสามารถเขียนหน่วยแสดงความชันบนแนวที่ความชันเท่ากันนั้นได้แถบหนึ่ง (เป็นส่วนของเส้นตรงที่ขนานกัน มีจุดกึ่งกลางอยู่บนเส้นเดียวกัน) เมื่อเขียนครบ 7 เส้น จะได้รูปร่างสนามทิศทาง คร่าว ๆ ดังรูปบนขวา จะเห็นได้ว่า การใช้แนวที่ความชันเท่ากัน ทำให้เขียนสนามทิศทางได้รวดเร็ว และเป็นระบบมากขึ้น

เมื่อเราได้สนามทิศทาง เราจะสามารถเขียนกราฟของคำตอบได้ (ซึ่งเราเรียกว่าเส้นโค้งอินทิกรัล) โดยอาจเริ่มที่จุดกลางของหน่วยแสดงความชันที่ใดที่หนึ่ง เขียนโค้งสัมผัสกับหน่วยแสดงความชัน ณ จุดนั้น เมื่อผ่านแนวที่ความชันเท่ากันเส้นใด พยายามเขียนให้สัมผัสกับหน่วยแสดงความชันบนเส้นนั้น ณ จุดผ่าน ถ้าไม่สัมผัสต้องเปลี่ยนแนวโค้งใหม่ สำหรับตัวอย่างนี้ เราได้เส้นโค้งอินทิกรัลเป็นวงกลมที่มีจุดกำเนิดเป็นศูนย์กลาง



สรุป

1. หน่วยแสดงความชัน คือส่วนของเส้นตรงท่อนสั้น ๆ ใช้แสดงค่าความชัน ณ แต่ละจุด โดยมีจุดนั้นเป็นจุดกึ่งกลาง มีค่าความชันตรงกับความชันที่คำนวณได้จากสูตร $\frac{dy}{dx} = F(x,y)$
2. สนามทิศทาง ของสมการเชิงอนุพันธ์ใด หมายถึง เซตของหน่วยแสดงความชันทั้งหมดของสมการเชิงอนุพันธ์นั้น ภาพของสนามทิศทาง มีส่วนคล้ายกับสนามแม่เหล็กที่เห็นโดยใช้ผงตะไบเหล็ก
3. แนวที่ความชันเท่ากัน คือ โลโก้ของจุด ซึ่งเมื่อคำนวณค่า $\frac{dy}{dx}$ ณ จุดเหล่านี้จะได้เท่ากัน สมการของแนวที่ความชันเท่ากันของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = F(x,y)$ อยู่ในรูป $k = F(x,y)$
หมายเหตุ บนแผนที่โลก เส้นที่ลากผ่านตำบลต่าง ๆ ที่มีความกดเท่ากัน เรียก isobar (isos = เท่า, bar มาจาก barometer เกี่ยวกับความกดอากาศ) เส้นที่ลากผ่านตำบลต่าง ๆ ที่มีอุณหภูมิเท่ากันเรียก isothermal กรณีนี้เช่นเดียวกัน isoclines เป็นเส้นที่ลากผ่านแนวที่ให้ค่าความชันเท่ากัน (isos = เท่า, cline มาจาก inclination เกี่ยวกับความชัน)
4. เส้นโค้งอินทิกรัล คือกราฟของคำตอบเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

ตัวอย่าง 2.10.2 จงเขียนเส้นโค้งอินทิกรัลของสมการ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-3(x+y)^2}{1+3(x+y)^2}$$

วิธีทำ สมการของแนวที่ความชันเท่ากันคือ

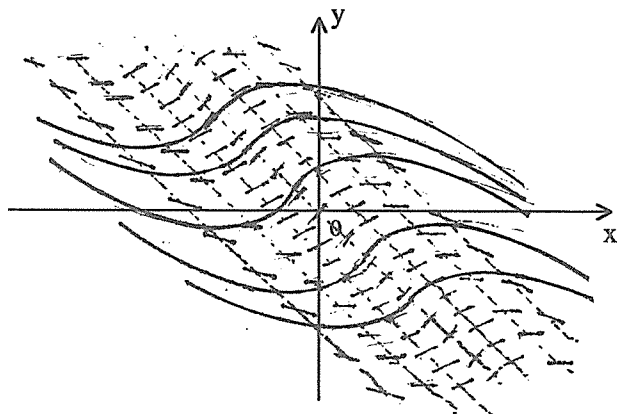
$$k = \frac{1-3(x+y)^2}{1+3(x+y)^2}$$

$$\text{หรือ} \quad \frac{1-k}{1+k} = \frac{6(x+y)^2}{2}$$

$$\text{หรือ} \quad y = -x \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1-k}{1+k}} \dots\dots\dots (1)$$

ตารางแนวที่ความชันเท่ากัน จากสูตร (1) เราได้ $-1 < k \leq 1$ และตารางดังต่อไปนี้

k	แนวที่ความชันเท่ากัน
1	$y = -x$
0	$y = -x \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{1}{2}$	$y = -x \pm \frac{1}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$y = -x \pm 1$



ตัวอย่าง 2.10.3 จงเขียนเส้นโค้งอินทิกรัลของสมการ

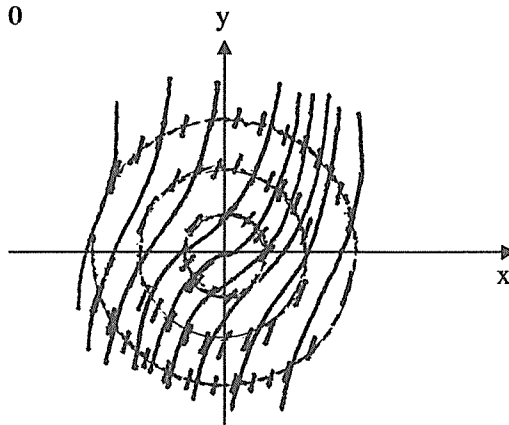
$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

วิธีทำ สมการของแนวที่ความชันเท่ากัน คือ

$$k = \sqrt{x^2 + y^2}$$

หรือ $x^2 + y^2 = k^2, k \geq 0$

k	แนวที่ความชันเท่ากัน
1	$x^2 + y^2 = 1$
2	$x^2 + y^2 = 4$
3	$x^2 + y^2 = 9$



ตัวอย่าง 2.10.4 (ตัวอย่างการเขียนเส้นโค้งอินทิกรัล โดยใช้อนุพันธ์ อันดับ 2)

จงเขียนเส้นโค้งอินทิกรัลของ $y' = 1 + xy$

วิธีทำ หาอนุพันธ์จากสมการเชิงอนุพันธ์เทียบกับ x ได้

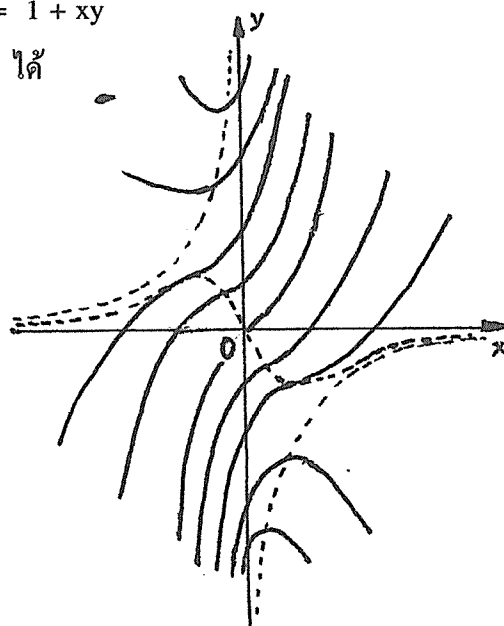
$$\begin{aligned} y'' &= xy' + y \\ &= x(1 + xy) + y \quad (\text{แทนค่า } y') \\ &= x + (x^2 + 1)y \end{aligned}$$

ดังนั้นโลกซ์ของจุดที่ $y'' = 0$ มีสมการ

$$0 = x + (x^2 + 1)y$$

หรือ $y = -\frac{x}{1+x^2}$ ซึ่งมีกราฟ

เป็นที่เส้นโค้งอินทิกรัลเปลี่ยนโค้งพอดี



อนึ่ง $y'' > 0$ เมื่อ $y > -\frac{x}{1+x^2}$

และ $y'' < 0$ เมื่อ $y < -\frac{x}{1+x^2}$

เส้นโค้งอินทิกรัลของสมการ $y' = 1 + xy$

เราจะได้เส้นโค้งอินทิกรัลดังรูปขวามือข้างบน

จงสังเกตด้วยว่า จากสมการเชิงอนุพันธ์ เมื่อ $y = -\frac{1}{x}$ จะได้ $y' = 0$

แบบฝึกหัด 2.10

จงเขียนร่างโค้งอินทิกรัลของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ โดยใช้แนวที่ความชันเท่ากัน
สนามทิศทาง หรือใช้อนุพันธ์อันดับ 2

1. $y' = \frac{x}{y}$

2. $y' = \frac{x+y}{x-y}$

3. $y' = -2xy$

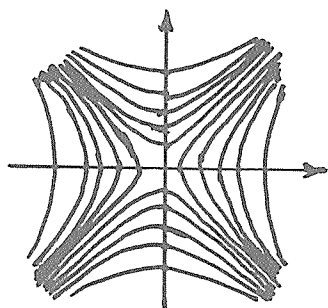
4. $y' = \frac{y - \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$

5. $y' = -\frac{5x}{x+y}$

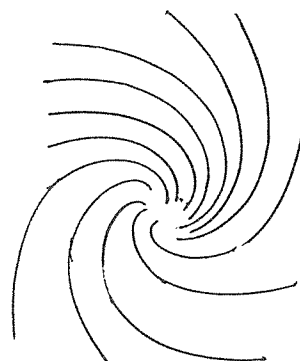
6. $y' = \frac{2x-3y}{x}$

คำตอบแบบฝึกหัด 2.10 (ให้กำหนดรายละเอียดเพิ่มเติมให้สมบูรณ์)

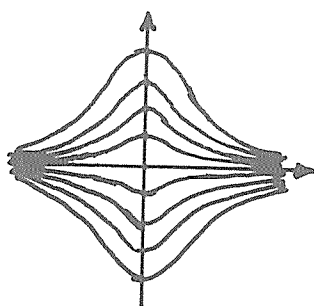
1.



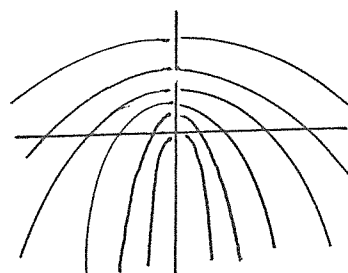
2.



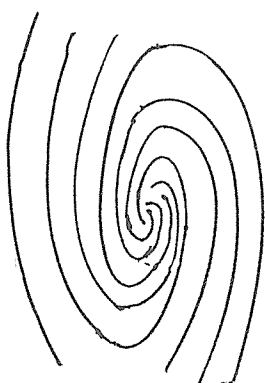
3.



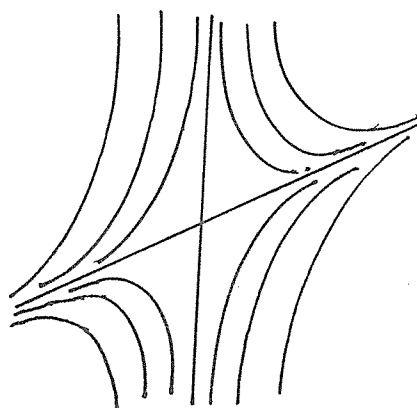
4.



5.



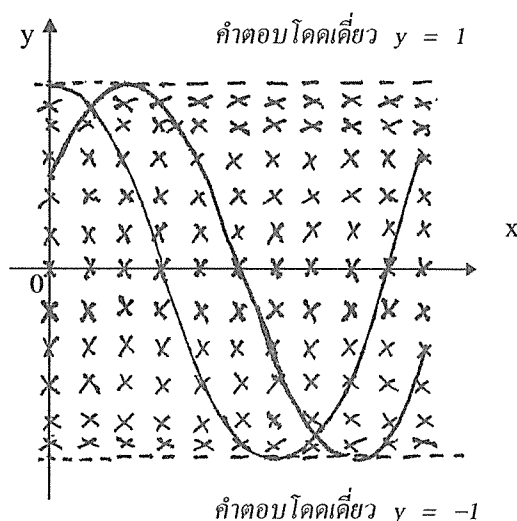
6.



2.11 สมการอันดับ 1 ที่มีดีกรีสูงกว่า 1

ในหัวข้อที่ผ่านมา เราได้ศึกษาสมการอันดับหนึ่ง ดีกรีนึง สำหรับหัวข้อนี้ เราจะขยายมาศึกษาสมการอันดับหนึ่งในรูปอื่น และเน้นสมการที่มีดีกรีสูงกว่าหนึ่ง

ในแง่พีชคณิต สมการที่มีดีกรีสูงกว่า 1 จะมีรากไม่ต่ำกว่า 1 ราก ดังนั้น ณ แต่ละจุด (x, y) อาจมีเส้นโค้งอินทิกรัลของสมการดังกล่าวผ่านมากกว่า 1 เส้น จึงอาจมีหน่วยแสดงความชันมากกว่า 1 เส้นด้วย ดังรูปข้างล่าง



สนามทิศทางของสมการ

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 - y^2$$

ซึ่งคำตอบ คือ

$$y = \sin(x - a)$$

รูปทั่วไปของสมการอันดับ 1 คือ $F(x, y, y') = 0$

ให้ $p = \frac{dy}{dx}$ (เพื่อความสะดวกในการใช้หัวข้อนี้)

จะได้ $p^n = \left(\frac{dy}{dx}\right)^n$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

และรูปทั่วไปของสมการดีกรี n คือ

$$p^n + g_1(x, y)p^{n-1} + \dots + g_{n-1}(x, y)p + g_n(x, y) = 0 \quad \dots \quad (1)$$

2.11.1 สมการที่แยกตัวประกอบได้ (factorable equations)

ถ้าสมการแบบ (1) แยกตัวประกอบได้ เช่นในรูป

$$(p - f_1)(p - f_2) \dots (p - f_n) = 0 \quad \dots \quad (2)$$

เราเรียกสมการนี้ว่า สมการที่แยกตัวประกอบได้

วิธีแก้สมการ (2)

ขั้นแรกหาคำตอบ

$$p - f_1 = 0 \quad \text{สมมติได้} \quad \phi_1(x, y, c_1) = 0$$

$$p - f_2 = 0 \quad \text{สมมติได้} \quad \phi_2(x, y, c_2) = 0$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$p - f_n = 0 \quad \text{สมมติได้} \quad \phi_n(x, y, c_n) = 0$$

จะได้ว่า คำตอบของ (2) ได้แก่รูป

$$\phi_1(x, y, c) \phi_2(x, y, c) \dots \phi_n(x, y, c) = 0 \dots\dots\dots (3)$$

เหตุผล ณ แต่ละจุด (x, y) สมการ (2) จริง ก็ต่อเมื่อ มีตัวประกอบ $y - f_r = 0$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ มีบาง } \phi_i(x, y, c_i) = 0$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } \phi_1(x, y, c) \phi_2(x, y, c) \dots \phi_n(x, y, c) = 0$$

หมายเหตุ

จงสังเกตว่าสมการ (3) ใช้ c ตัวเดียวให้สอดคล้องกับหลักที่ว่า คำตอบทั่วไปของสมการอันดับ n จะมีตัวคงค่าไม่เจาะจง n ตัว อนึ่ง จากการแปรค่า c จะได้ว่า กราฟของ (3) กับสมการที่เกิดจากการเปลี่ยน c เป็นฟังก์ชันของ c ใน (3) เช่น

$$\phi_1(x, y, c) \phi_2(x, y, -c) \dots \phi_n(x, y, 1-c) = 0$$

จะเป็นกราฟเดียวกัน มีข้อแม้ว่า ฟังก์ชันของ c เหล่านั้นมีค่าอยู่ภายในขอบเขตเดียวกับ c ดังนั้น จึงอาจใช้สมการที่เปลี่ยนใหม่เป็นคำตอบแทน (3) ได้

ตัวอย่าง 2.11.1 จงแก้สมการ $p^2 - p - 6 = 0$ วิธีทำ แยกตัวประกอบได้เป็น $(p - 3)(p + 2) = 0$

$$p - 3 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 3$$

$$y = 3x + c_1$$

$$y - 3x - c_1 = 0$$

$$p + 2 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -2$$

$$y = -2x - c_2$$

$$y + 2x + c_2 = 0$$

ดังนั้น คำตอบคือ

$$(y - 3x + c)(y + 2x + c) = 0$$

ตัวอย่าง 2.11.2 จงแก้สมการ $p^2 - 4y = 0$ วิธีทำ แยกตัวประกอบได้เป็น $(p - 2\sqrt{y})(p + 2\sqrt{y}) = 0$

$$\text{แก้สมการ} \quad p = \pm 2\sqrt{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm 2\sqrt{y}$$

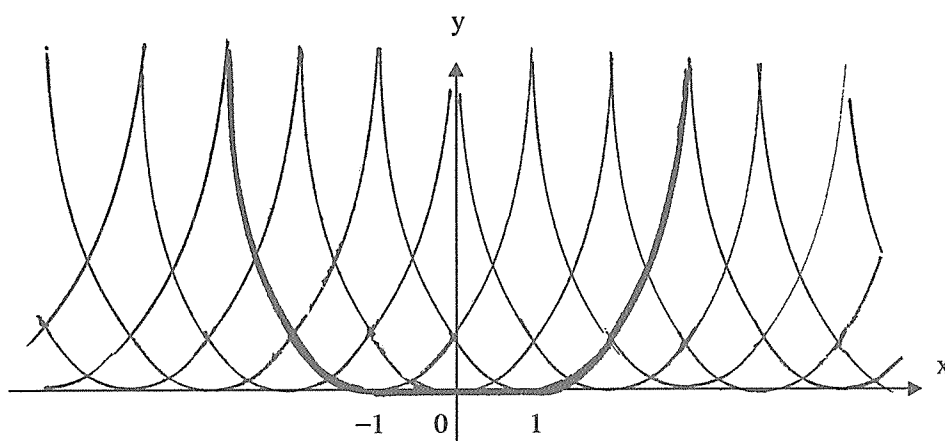
$$\begin{aligned}\frac{dy}{2\sqrt{y}} &= \pm dx \\ \sqrt{y} &= \pm x + c \quad \dots\dots\dots (a)\end{aligned}$$

ดังนั้น คำตอบคือ

$$(\sqrt{y} + x - c)(\sqrt{y} - x + c) = 0$$

หรือ $y - (x - c)^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (b)$

ข้อสังเกต (ก) แต่ละสมการใน (a) เช่น $\sqrt{y} = x + c$ จะเป็นพาราโบลาครึ่งซีก ส่วนสมการ (b) จะเป็นพาราโบลาเต็มรูป และมีกราฟดังรูปล่าง



(ข) เราสังเกตจากรูปว่า $y = 0$ เป็นคำตอบโคจรเดียว ตรวจสอบได้โดยการแทนค่าในสมการโฮมจี ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\text{จาก } y &= 0 \\ \text{ได้ } \frac{dy}{dx} &= p = 0 \\ \text{แทนค่า } 0^2 - 4(0) &= 0 \quad \text{จริง}\end{aligned}$$

(ค) เราอาจสร้างคำตอบที่มีใจ้สมการใน (a) ได้ เช่น

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x < -1 \\ 0, & -1 \leq x \leq 1 \\ (x-1)^2, & 0 < x \end{cases}$$

มีกราฟดังเส้นหนักในรูปข้างบน เนื่องจากทุกส่วนของกราฟของฟังก์ชันนี้ สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ ฟังก์ชันนี้จึงเป็นคำตอบด้วย ทั้งนี้ เมื่อย้อนกลับไปดูสมการ (3) ต้องระวังว่าคำตอบย่อยจาก (3) ไม่จำเป็นต้องอยู่ในรูป $\phi_1(x, y, c) = 0$ แต่อาจสร้างจากท่อนโค้งของคำตอบต่อกันในลักษณะโค้งเรียบได้

ตัวอย่าง 2.11.3 จงแก้สมการ $y^2 p^2 - 2xy p + 2y^2 - x^2 = 0$

วิธีทำ ใช้สูตรสำเร็จในการหาคำตอบของสมการควอดราติก เราได้ตามลำดับว่า

$$\begin{aligned} yp &= \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4(2y^2 - x^2)}}{2} \\ y \frac{dy}{dx} &= x \pm \sqrt{2} \sqrt{x^2 - y^2} \quad \dots\dots\dots (a) \\ \frac{xdx - ydy}{\sqrt{x^2 - y^2}} &= \pm \sqrt{2} dx \\ \frac{d(x^2 - y^2)}{2\sqrt{x^2 - y^2}} &= \pm \sqrt{2} dx \\ \sqrt{x^2 - y^2} &= \pm \sqrt{2} x + c \end{aligned}$$

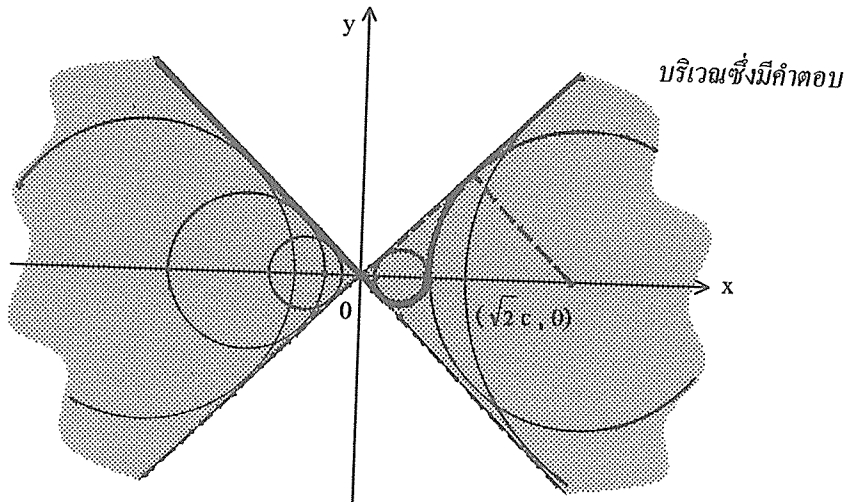
ดังนั้น คำตอบคือ

$$\begin{aligned} (\sqrt{x^2 - y^2} + \sqrt{2} x - c)(\sqrt{x^2 - y^2} - \sqrt{2} x + c) &= 0 \\ x^2 - y^2 - 2x^2 + 2\sqrt{2} cx - c^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 2\sqrt{2} cx + c^2 &= 0 \end{aligned}$$

หรือ $(x - \sqrt{2} c)^2 + y^2 = c^2$

จากสมการ (a) บริเวณที่มีคำตอบคือบริเวณซึ่ง $x^2 - y^2 \geq 0$ มีเส้นกั้นคือ $y = \pm x$

กราฟคำตอบเป็นวงกลมศูนย์กลาง $(\sqrt{2} c, 0)$ รัศมี c ดังรูป



จงสังเกตว่าเส้น $y = \pm x$ เป็นคำตอบโคจรเดี่ยว และเราอาจสร้างคำตอบดังเส้นทึบในรูป ซึ่งใช้ส่วนโค้งของคำตอบเฉพาะและคำตอบโคจรเดี่ยวต่อกัน

2.11.2 สมการซึ่งสามารถแก้หาค่า y ได้ (equations solvable for y)

ถ้า เขียนสมการแบบ (1) ได้ในรูป $y = f(x, p)$ (4)

เรียกสมการนั้นว่า สมการซึ่งสามารถแก้หาค่า y ได้

เราจะแก้สมการนี้ตามวิธีของแคลโรต (Claude Alexis Clairaut) ซึ่งเป็นบุคคลแรกที่หา
อนุพันธ์ สมการเชิงอนุพันธ์ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ หาอนุพันธ์ (4) เทียบกับ x จะได้

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx} \\ \text{หรือ } p &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx} \end{aligned} \quad \text{..... (5)}$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งประกอบด้วย $x, p, \frac{dp}{dx}$ (ไม่มี y)

แก้สมการนี้ สมมติได้ $G(x, p, c) = 0$ (6)

จะได้ว่า คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปสมการพารามตริก คือ

$$\begin{cases} y &= f(x, p) \\ G(x, p, c) &= 0 \end{cases} \quad (\text{ควมสมการ (4) และ (6)})$$

มี p เป็นพารามิเตอร์ (ซึ่งถ้ากำจัด p ได้ จะได้สมการที่มี x, y, c)

ตัวอย่าง 2.11.4 จงแก้สมการ $p^2 x - y = 0$

วิธีทำ จัดสมการได้เป็น $y = p^2 x$

$$\begin{aligned} \text{หาอนุพันธ์เทียบกับ } x, \quad \frac{dy}{dx} &= p^2 + 2xp \frac{dp}{dx} \\ p &= p^2 + 2xp \frac{dp}{dx} \end{aligned} \quad \text{..... (a)}$$

$$\begin{aligned} \text{ถ้า } p \neq 0 \text{ เราได้ } 1 &= p + 2x \frac{dp}{dx} \\ \text{หรือ } \frac{dp}{dx} + \frac{1}{2x} p &= \frac{1}{2x} \end{aligned}$$

I.F. ได้แก่ $e^{\int \frac{1}{2x} dx}$ เลือกใช้ $e^{\frac{1}{2} \ln x} = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned} p\sqrt{x} &= \int \frac{1}{2x} \sqrt{x} dx + c \\ &= \sqrt{x} + c \end{aligned}$$

ดังนั้น คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ

$$\begin{cases} y &= p^2 x \\ p\sqrt{x} &= \sqrt{x} + c \end{cases} \quad \text{หรือ } y = (\sqrt{x} + c)^2 \text{ ซึ่งจะเป็นคำตอบทั่วไป}$$

ในกรณีที่ $p = 0$ เมื่อควบคู่กับสมการโจทย์ $y = p^2 x$ เราได้ $y = 0$ เป็นคำตอบ
โดดเดี่ยว ซึ่งเราอาจตรวจสอบได้

หมายเหตุ มีกรณีที่มีเมื่อหาอนุพันธ์สมการเชิงอนุพันธ์แล้วได้สมการ เช่น (a) ใน ตัวอย่าง 1) ที่แยกเป็นสมการย่อยได้ สมการย่อยที่มี $\frac{dp}{dx}$ จะให้ผลเป็นคำตอบทั่วไป เพราะเมื่อแก้สมการย่อยนั้นแล้วจะคิด c (ตัวคงค่าไม่เจาะจง) ส่วนสมการย่อยอื่น เราจะไม่แก้สมการ เพราะไม่คิดค่า $\frac{dp}{dx}$ แล้ว เราสามารถนำไปควบคู่กับสมการโจทย์ให้คำตอบได้เลย คำตอบที่ได้อาจเป็นคำตอบโคตเดี่ยว หรือคำตอบเฉพาะ

ตัวอย่าง 2.11.5 (Clairaut equations)

รูปสมการ แคลโรต คือ $y = xp + f(p)$

เป็นสมการที่แก้หาค่า y ได้ เราหาอนุพันธ์เทียบกับ x ได้

$$p = \frac{dy}{dx} = p + (x + f'(p)) \frac{dp}{dx}$$

$$(x + f'(p)) \frac{dp}{dx} = 0$$

$$x + f'(p) = 0 \text{ หรือ } \frac{dp}{dx} = 0$$

แก้สมการ $\frac{dp}{dx} = 0$ ได้ $p = c$

ดังนั้น คำตอบของสมการแคลโรตในรูปสมการพาราเมตริก

$$\text{คือ } \begin{cases} y &= xp + f(p) \\ p &= c \end{cases}$$

กำจัด p เราได้ คำตอบของสมการแคลโรต เป็น

$$y = cx + f(c)$$

ข้อสังเกต คำตอบของสมการแคลโรต ได้จากการเปลี่ยน p เป็น c ในสมการแคลโรต

ตัวอย่าง 2.11.6 (ตัวอย่างสมการแคลโรตและคำตอบ) จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้

ก. $p^2 + 2xp - 2y = 0$

ข. $(px - y)^3 = 3p^2 + 2p$

ค. $y = 3px + 6y^2 p$

ง. $(\cos y)p^2 + (\sin x \cos x \cos y)p - \sin y \cos^2 x = 0$

วิธีทำ ก. จัดเป็นสมการแคลโรตได้ คือ $y = xp + \frac{1}{2}p^2$

คำตอบคือ $y = cx + \frac{1}{2}c^2$

ข. จัดเป็นสมการแคลโรตได้ คือ $y = px - \sqrt[3]{3p^2 + 2p}$

คำตอบคือ $y = cx - \sqrt[3]{3c^2 + 2c}$

ค. สมการนี้มีใช่สมการแคลโรต ($3px$ มิใช่ px) แต่เราทราบว่า $3y^2 p = \frac{d}{dx} y^3$

ดังนั้นคูณสมการโจทย์ y^2 เราได้



CLAUDE ALEXIS CLAIRAUT
(1713 – 1765)

$$\begin{aligned} y^3 &= 3y^2 px + 6y^4 p^2 \\ &= x \left(\frac{dy^3}{dx} \right) + \frac{6}{9} \left(\frac{dy^3}{dx} \right)^2 \end{aligned}$$

หรือ $u = x \left(\frac{du}{dx} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{du}{dx} \right)^2$ โดย $u = y^3$

สมการนี้เป็นสมการแกลโลต มีคำตอบคือ $u = cx + \frac{2}{3}c^2$

ดังนั้นคำตอบของ ก. คือ $y^3 = cx + \frac{2}{3}c^2$

ง. จงสังเกตว่าพจน์ที่มี p จะมี $\cos y$ อยู่ด้วย และ $(\cos y)p = \frac{d}{dx} \sin y$

เราจัดสมการได้เป็น

$$\left(\frac{d}{dx} \sin y \right)^2 + \sin x \cos x \left(\frac{d}{dx} \sin y \right) - \sin y \cos^2 x = 0$$

เพื่อให้เหลือพจน์ $\sin y$ ชัดขึ้น เราหารสมการด้วย $\cos^2 x$ ได้

$$\left(\frac{d \sin y}{\cos x dx} \right)^2 + \sin x \left(\frac{d \sin y}{\cos x dx} \right) - \sin y = 0$$

หรือ $\left(\frac{d \sin y}{d \sin x} \right)^2 + \sin x \left(\frac{d \sin y}{d \sin x} \right) - \sin y = 0$

ให้ $u = \sin x$, $v = \sin y$ เราได้

$$\left(\frac{dv}{du} \right)^2 + u \left(\frac{dv}{du} \right) = v \quad \text{เป็นสมการแกลโลต}$$

ซึ่งคำตอบคือ $v = cu + c^2$

ดังนั้น คำตอบ ง. คือ $\sin y = c \sin x + c^2$

ตัวอย่าง 2.11.7 จงแก้สมการ $p^2 x(x-2) + p(2y-2xy-x+2) + y^2 + y = 0$

วิธีทำ มองสมการเป็นสมการพหุนามของ p ทดลองแยกสัมประสิทธิ์ของ p^2 และพจน์อิสระดังนี้

$$\begin{array}{ccc} \text{ส.ป.ส.ของ } p^2 & x & x-2 \\ & \diagdown & \diagup \\ & -y-1 & -y \end{array}$$

ปรากฏว่า คูณทแยงแล้วบวกกันได้เท่ากับ ส.ป.ส. ของ p ดังนั้น สมการนี้แยกตัวประกอบได้เป็น

$$(px - y - 1)(p(x-2) - y) = 0$$

แก้สมการ $y = px - 1$ และ $y = px - 2p$ ซึ่งเป็นสมการแกลโลต

ได้เป็น $y = cx - 1$ และ $y = cx - 2c$ ตามลำดับ

ดังนั้น คำตอบของสมการโทยคือ

$$(y - cx + 1)(y - cx + 2c) = 0$$

2.11.3 สมการซึ่งสามารถแก้หาค่า x ได้ (equations solvable for x)

ถ้าเขียนสมการแบบ (1) ได้ในรูป $x = F(y, p)$ (7)

เรียกสมการนี้ว่า สมการซึ่งสามารถแก้หาค่า x ได้

การแก้สมการ (5) เรากำจัด x โดยการหาอนุพันธ์เทียบกับ y ได้

$$\frac{1}{p} = \frac{dx}{dy} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{dp}{dy}$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ที่มี $y, p, \frac{dp}{dy}$

แก้สมการเชิงอนุพันธ์นี้ สมมติได้ $G(y, p, c) = 0$ (8)

จะได้คำตอบของสมการเป็น

$$\begin{cases} x = F(y, p) \\ G(y, p, c) = 0 \end{cases} \quad (\text{ควมสมการ (7) และ (8)})$$

มี p เป็นพารามิเตอร์

ตัวอย่าง 2.11.8 จงแก้สมการ $p^2 + 2y - 2x = 0$

วิธีทำ เขียนได้เป็น $x = y + \frac{1}{2}p^2$

$$\frac{1}{p} = \frac{dx}{dy} = 1 + p \frac{dp}{dy}$$

$$\frac{p^2}{1-p} dp = dy$$

$$0 = (p + 1 + \frac{1}{p-1})dp + dy$$

$$\frac{1}{2}p^2 + p + \ln |p-1| + y = c$$

ดังนั้น คำตอบแบบพารามิเตอร์ คือ

$$\begin{cases} y = c - \frac{1}{2}p^2 - p - \ln |p-1| \\ x = c - p - \ln |p-1| \end{cases}$$

แบบฝึกหัด 2.12

จงหาคำตอบทั่วไปของสมการต่อไปนี้

1. $p^2 - 3 = 0$

2. $x^2 p^2 + xy p - 6y^2 = 0$

3. $p^2 + xp - y = 0$

4. $x^2 p^2 + xp - y^2 + y = 0$

5. $y = px + \ln p$

6. $y = 2p + y p^3$ (ใช้ $y^2 = z$)

7. $y = (1 + p)x + p^2$

8. $y = 2p + \sqrt{1+p^2}$

9. $x = yp + p^2$

10. $(px - y)(py + x) = 2p$

คำตอบแบบฝึกหัด 2.12

1. $(y - \sqrt{3}x + c)(y + \sqrt{3}x + c) = 0$

2. $(y - cx^2)(y - cx^{-3}) = 0$

3. $y = cx + c^2$

4. $(xy - c)(y - cx - 1) = 0$

5. $y = cx + \ln c$

6. $y^2 = cx + \frac{1}{8}c^3$

7. $x = 2(1 - p) + ce^{-p}$

8. $x = \ln cp^2 (cp + \sqrt{p^2 + 1})$

$$y = (1 + p)x + p^2$$

$$y = 2p + \sqrt{1+p^2}$$

9. $x = -\frac{p}{\sqrt{p^2-1}} \ln(p + \sqrt{p^2-1}) + \frac{cp}{\sqrt{p^2-1}}$

$$y = -p - \frac{1}{\sqrt{p^2-1}} \ln(p + \sqrt{p^2-1}) + \frac{c}{\sqrt{p^2-1}}$$

10. $y^2 = cx^2 - \frac{2c}{1+c}$

บทที่ 3

การประยุกต์ของสมการอันดับ 1

ในบทนี้เราจะได้ใช้ความรู้ในเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 อธิบายปรากฏการณ์ต่าง ๆ ในหลายสาขาวิชาเป็นต้นว่า คณิตศาสตร์ ฟิสิกส์ วิศวกรรม เคมี ประชากรศาสตร์ โดยสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ตามปรากฏการณ์เหล่านั้น และแก้สมการเพื่อได้คำตอบสำหรับอธิบายปรากฏการณ์เหล่านั้น

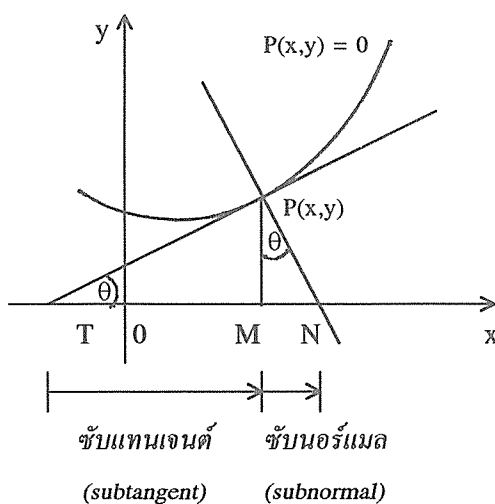
หัวข้อที่จะศึกษาเพื่อเป็นแนวทางมีดังนี้

1. เรขาคณิต
2. ทราเจกทอรีมุมฉาก
3. การประยุกต์ทางกลศาสตร์
4. การประยุกต์ทางวงจรไฟฟ้า
5. การสลายตัวของสารกัมมันตภาพรังสี
6. การประยุกต์ในทางเคมี

3.1 เรขาคณิต

ในชั้นมัธยมศึกษา เราศึกษาโลกซ์ของจุด โดยอาศัยมุมและความยาว ในหัวข้อนี้ จะใช้เงื่อนไขของโลกซ์ของจุดที่ต่างออกไป โดยอาศัยความชันของโค้งเป็นสำคัญ และจะใช้โลกซ์ของจุดได้กว้างกว่าโลกซ์ของจุดที่ศึกษาในชั้นมัธยมศึกษา ก่อนอื่นขอทบทวนคุณสมบัติของโค้งที่เกี่ยวข้องกับอนุพันธ์ดังต่อไปนี้

กรณี 1 ระบบพิกัดฉาก (rectangular coordinates)



ให้ (x,y) เป็นจุดใด ๆ บนโค้ง $F(x,y) = 0$

ณ จุดนี้

ก) ความชันของเส้นสัมผัส เป็น $\frac{dy}{dx}$

ข) ความชันของเส้นนอร์แมล เป็น $-\frac{dx}{dy}$

ค) ความยาวของซับแทนเจนต์ : TM

หาได้ดังนี้

$$\frac{y}{TM} = \tan \theta = \frac{dy}{dx}$$

$$TM = y \frac{dx}{dy}$$

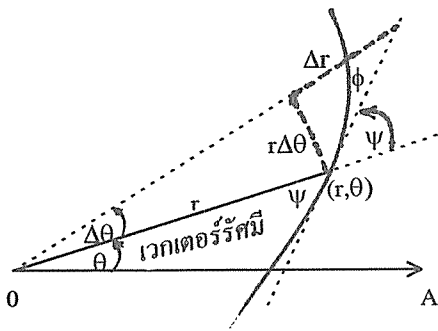
ง) ความยาวของชันนอร์แมล MN หาได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{y}{-MN} &= \text{ความชันของเส้นนอร์แมล} = -\frac{dx}{dy} \\ \therefore MN &= y \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{จ) ความยาวส่วนโค้งเล็ก ๆ } ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \\ &= \sqrt{1+(y')^2} dx \quad \text{เมื่อ } y \text{ เป็นฟังก์ชันของ } x \end{aligned}$$

* หมายเหตุ เราใช้ความยาวของชันแทนเจนต์และชันนอร์แมลเป็นความยาวที่กำหนดทิศทาง (directed length)

กรณี 2 ระบบพิกัดเชิงขั้ว



ณ จุด (r, θ) ของโค้ง $r = f(\theta)$ ให้

ψ เป็นมุมที่เส้นสัมผัสโค้ง ทำกับ

เวกเตอร์รัศมี

$$\tan \phi = \frac{r \Delta \theta}{\Delta r}$$

เมื่อ $\Delta \theta \rightarrow 0$, $\phi \rightarrow \psi$, $\Delta r \rightarrow dr$

$$\therefore \tan \psi = \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \tan \phi = r \frac{d\theta}{dr}$$

$$\tan \psi = r \frac{d\theta}{dr}$$

ตัวอย่างการประยุกต์ทางเรขาคณิต

ตัวอย่าง 3.1.1 จงหาสมการโค้ง ซึ่งมีค่าความชันของเส้นสัมผัส ณ จุด (x, y) บนโค้งเป็น $-\frac{y}{x}$

วิธีทำ จากโจทย์เราได้

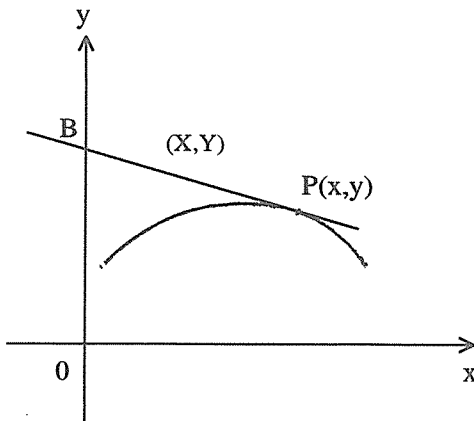
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0$$

$$\ln |y| + \ln |x| = \ln c$$

$$xy = C$$

ตัวอย่าง 3.1.2 จงหาสมการเส้นโค้ง ซึ่งความยาวของส่วนของเส้นสัมผัสจากจุดสัมผัสถึงแกน y มีค่าเท่ากับส่วนตัดบนแกน y ของเส้นสัมผัส



ให้ (X, Y) เป็นจุดบนเส้นสัมผัส ซึ่งสัมผัส

โค้ง ณ จุด $P(x, y)$ จะได้สมการเส้นสัมผัส คือ

$$Y - y = \frac{dy}{dx} (X - x)$$

ซึ่งตัดแกน y (เมื่อ $X = 0$) ที่จุด

$$B(0, y - x \frac{dy}{dx})$$

ดังนั้น ส่วนตัดแกน y ของเส้นสัมผัส คือ

$$OB = y - x \frac{dy}{dx}$$

เงื่อนไขของโจทย์ คือ $BP = OB$

$$\begin{aligned} \text{แต่ } BP &= \sqrt{(x - 0)^2 + (y - y + x \frac{dy}{dx})^2} \\ &= x \sqrt{(1 + \frac{dy}{dx})^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } x \sqrt{(1 + \frac{dy}{dx})^2} &= y - x \frac{dy}{dx} \\ x^2 &= y^2 - 2xy \frac{dy}{dx} \\ dx &= \frac{y^2 dx - x dy^2}{x^2} = -d\left(\frac{y^2}{x}\right) \\ x &= -\frac{y^2}{x} + 2c \end{aligned}$$

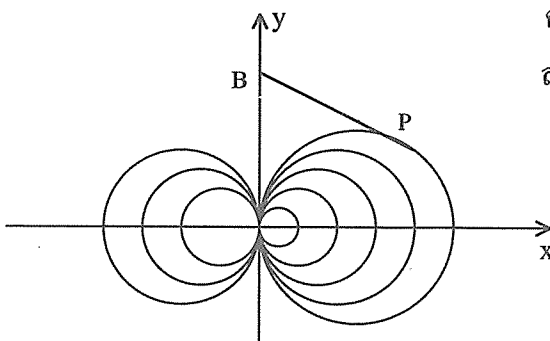
$$\text{หรือ } x^2 - 2cx + y^2 = 0$$

$$\text{หรือ } (x - c)^2 + y^2 = c^2$$

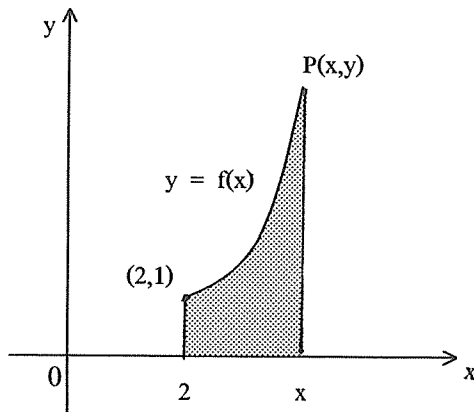
ข้อสังเกต เส้นโค้งนี้เป็นวงกลมที่ศูนย์กลางอยู่บนแกน x และสัมผัสแกน y ที่จุดกำเนิดและ

ความยาวในโจทย์คือความยาวของเส้นสัมผัส

สองเส้นจาก B บนแกน y มาสัมผัสวงกลม



ตัวอย่าง 3.1.3 จงหาสมการโค้ง ซึ่งผ่านจุด (2,1) และพื้นที่ใต้โค้งเหนือแกน x จาก 2 ถึง x
มีค่าตัวเลขเท่ากับความยาวส่วนโค้ง จาก 2 ถึง x



วิธีทำ ให้ $y = f(x)$ เป็นสมการของโค้ง
จากโจทย์จะได้

$$\int_2^x y \, dx = \int_2^x \sqrt{1+(y')^2} \, dx$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x จะได้

(ทฤษฎีบทพื้นฐานของแคลคูลัส)

$$y = \sqrt{1+(y')^2}$$

$$\text{ดังนั้น } y' = \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} = \pm dx$$

$$\ln |y + \sqrt{y^2 - 1}| = \pm x + c$$

เมื่อ $x = 2$ ได้ $y = 1$ ดังนั้น $c = \mp 2$

$$\text{ดังนั้น } (y + \sqrt{y^2 - 1}) = e^{\pm (x-2)}$$

$$\sqrt{y^2 - 1} = e^{\pm (x-2)} - y$$

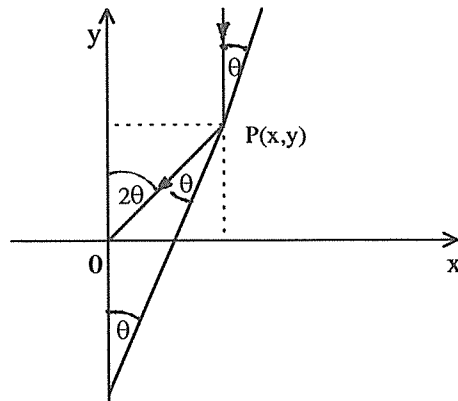
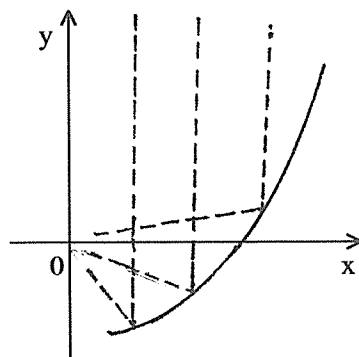
$$2ye^{\pm (x-2)} = e^{\pm (x-2)} + 1$$

$$y = \frac{e^{(x-2)} + e^{-(x-2)}}{2}$$

$$= \cosh(x-2)$$

ตัวอย่าง 3.1.4 ต้องการสร้างเตาแสงอาทิตย์ (solar furnace) โดยใช้กระจกทำเป็นรูปกะทะเพื่อให้แสงรังสีของดวงอาทิตย์ที่ตกกระทบกระจกสะท้อนผ่านจุดเดียวกัน จงหาโค้งที่ใช้ออกแบบความโค้งของกะทะ

วิธีทำ ให้แสงอาทิตย์ขนานกับแกน y สะท้อนโค้ง $y = f(x)$ ผ่านจุดกำเนิด



และให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนโค้งด้านขวาของแกน y จะได้

$$\begin{aligned} \tan 2\theta &= \frac{x}{y} \quad \text{และ} \quad \tan \theta = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{y'} \\ \text{เนื่องจาก} \quad \tan 2\theta &= \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \\ \text{แทนค่า} \quad \frac{x}{y} &= \frac{2/y'}{1 - (1/y')^2} = \frac{2y'}{(y')^2 - 1} \\ (y')^2 - \frac{2y}{x} y' - 1 &= 0 \\ y' &= \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1} \quad (\text{ใช้ค่าบวกเพราะกระเจกต้องโค้งขึ้นในชีกขวา}) \end{aligned}$$

เป็นสมการสัมประสิทธิ์เอกพันธ์ ให้ $y = ux$, $dy = x du + u dx$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x \frac{du}{dx} + u &= u + \sqrt{u^2 + 1} \\ \therefore \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} &= \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln (u + \sqrt{1 + u^2}) &= \ln x + \ln c \\ (u + \sqrt{1 + u^2}) &= cx \quad \text{หรือ} \quad c^2 x^2 - 2cu x - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า} \quad u &= \frac{y}{x} \\ c^2 x^2 - 2cy - 1 &= 0 \\ y &= \frac{c}{2} x^2 - \frac{1}{2c} \quad \text{เป็นพาราโบลา} \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 3.1

1. จงหาสมการเชิงอนุพันธ์ของ

ก. วงกลมทั้งหลายซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้น $y = x$ และสัมผัสแกน y

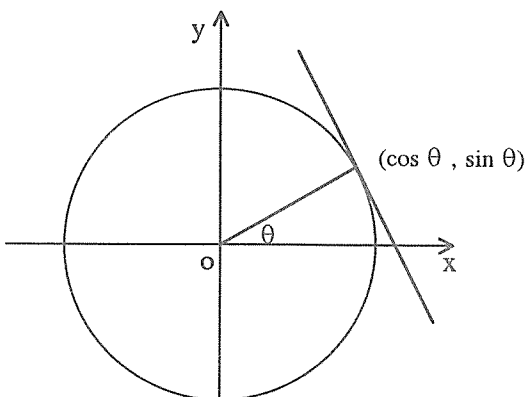
ข. พาราโบลาที่มีจุดยอดที่จุดกำเนิด และมีแกนบนแกน y

ค. เส้นตรง ซึ่งสัมผัสวงกลมหน่วย $x^2 + y^2 = 1$

(ข้อแนะ : ให้ θ เป็นมุมที่เส้นต่อจุด o ไปยัง $(\cos \theta, \sin \theta)$ บนวงกลมหน่วยทำกับ

แกน x หาสมการเส้นสัมผัส ณ จุด

$(\cos \theta, \sin \theta)$ ในรูป θ แล้วกำจัด θ)



2. จงตัดสินใจว่าโค้ง ซึ่งมีเงื่อนไขต่อไปนี้ มีสมการและรูปร่างเป็นอย่างไร

ก. ค่าชันแทนเจนต์มีค่าคงที่เป็น 4

ข. ความชันของนอร์แมลมีค่าคงที่

ค. ค่าชันแทนเจนต์กับชันนอร์แมลรวมกันเป็น 2

ง. เส้นนอร์แมลจาก $P(x, y)$ ถึงแกน x มีจุดกึ่งกลางอยู่บนแกน y

จ. เส้นสัมผัสตัดแกน x และแกน y ได้รูปสามเหลี่ยม ซึ่งมีพื้นที่เป็น a^2

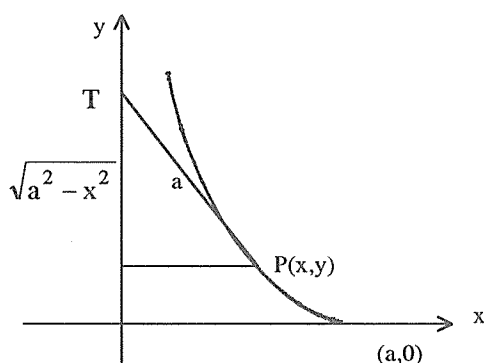
ฉ. ผลคูณของระยะทางจากจุด $(a, 0)$ และ $(-a, 0)$ ไปยังเส้นสัมผัสมีค่าเท่ากับ k

ช. โพรเจกชันบนแกน y ของเส้นตั้งฉากจากจุดกำเนิดไปยังเส้นสัมผัสใด ๆ มีค่าเท่ากับ k

ซ. ส่วนของแกน y ที่ถูกตัดโดยเส้นสัมผัสและเส้นนอร์แมลที่ (x, y) ใด ๆ บนโค้งมีจุดกำเนิดเป็นจุดกึ่งกลาง

ณ. โค้งผ่านจุดกำเนิด และ ณ จุด (x, y) ใด ๆ บนโค้ง ลากเส้นไปตั้งฉากกับแกน x และแกน y ทำให้ได้พื้นที่สองบริเวณต่อกันด้วยโค้งนี้ ซึ่งพื้นที่ส่วนบนเป็น 2 เท่าของพื้นที่ส่วนล่าง

3.



ลากน้ำหนัก P บนระนาบ xy ด้วยเชือก PT

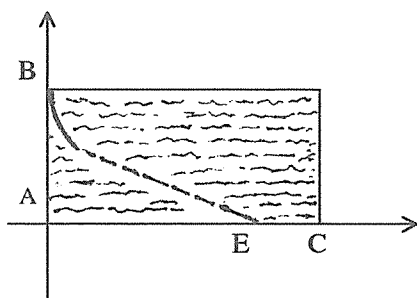
ถ้า T เริ่มต้นจากจุดกำเนิดและเคลื่อน

ไปในทิศทางบวกของแกน y และ P เริ่มที่จุด $(a, 0)$ จงหาแนวทางที่ P เคลื่อนที่

(เรียกโค้งที่เป็นแนวทางนี้ว่า โค้งจอมแห

(Tractrix มาจากภาษาละติน Tractum = ลาก) ผิวที่เกิดจากการหมุนโค้งจอมแห รอบแกน y จะเป็นโมเดลของเรขาคณิตของโลบาคเชฟสกี)

4.



ชายคนหนึ่งอยู่บน A ของสระรูปสี่เหลี่ยมผืน

ผ้าดังรูป ขณะที่ลมสงบเขาเดินตามขอบสระ

AC แล้ววิ่งเรือจากจุด B ด้วยเชือกซึ่งยาว 20

ฟุต สมมติเชือกตึงตลอดเวลา จงหาทางเดิน

ของเรือ และถ้าเรืออยู่ห่างจากฝั่ง AC เป็น

ระยะ 12 ฟุต จงหาตำแหน่งของชายผู้นั้น

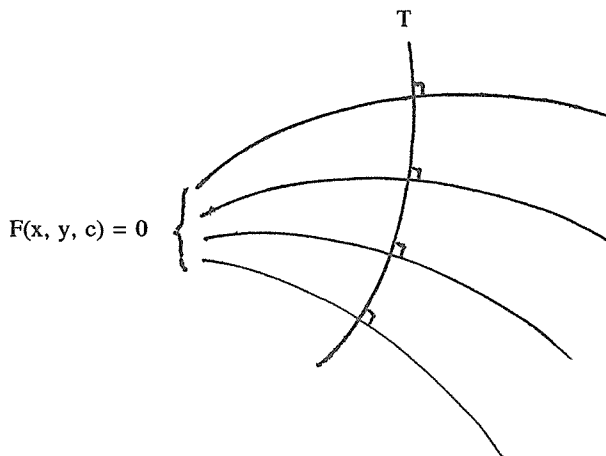
5. จงหารูปของกระจกโค้ง ซึ่งแสงจากหลอดไฟต้นกำเนิดแสง ณ จุดกำเนิดจะสะท้อนกระจกเป็นลำแสงที่ขนานกับแกน x

คำตอบแบบฝึกหัด 3.1

1. ก. $(x-y)^2 [1+y'^2] = (x+yy')^2$ ข. $xy' = 2y$ ค. $(y-xy')^2 = 1+y'^2$
2. ก. $y = ce^{\frac{x}{4}}$ ข. $y = -\frac{1}{a}x + c$
 ค. $(\ln(1+\sqrt{1-y^2}) - \sqrt{1-y^2} - x - c)(\sqrt{1-y^2} + \ln(1-\sqrt{1-y^2}) - x - c) = 0$
 ง. $y^2 + 2x^2 = c$ จ. $2xy = a^2$
 ฉ. $kx^2 = (k+a^2)(k-y^2)$ ช. $x^2 = 4k(k-y)$
 ซ. $x^2 + 2cy = c^2$ ฌ. $y = cx^3$
3. $y = a \ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right) - \sqrt{a^2-x^2}$
4. 22 ฟุตจากจุด A 5. $y^2 = 2cx + c^2$

3.2 ทราเจกทอรีมุมฉาก

บทนิยาม 3.2.1 กำหนดวงศ์เส้นโค้ง $F(x, y, c) = 0$ ชุดหนึ่ง ถ้าโค้ง T ตัดกับทุกสมาชิกของวงศ์ชุดนี้เป็นมุมฉาก ณ ทุก ๆ จุดตัดจะเรียก T ว่าเป็น ทราเจกทอรีมุมฉาก (orthogonal trajectory)* เส้นหนึ่งของโค้งชุดนี้



ในรูป วงเส้นโค้งกำหนดด้วย $F(x, y, c) = 0$
 T เป็นทราเจกทอรีมุมฉาก

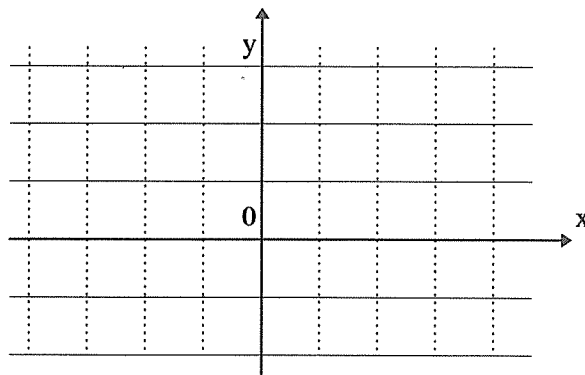
* orthogonal แปลว่า มุมฉาก
 trajectory แปลว่า ตัดผ่าน

(Gr. ortho - right γωνία = angle)

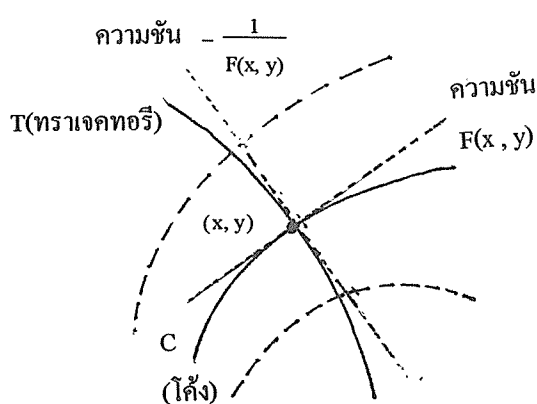
(Lat. tractus = cut across)

จุดมุ่งหมายของหัวข้อนี้ คือ เมื่อกำหนดวงค์เส้นโค้งมาให้อาจหาวงค์เส้นโค้งที่ตัดกับทุกสมาชิกของวงค์เส้นโค้งนี้ เป็นมูมจาก

กรณี 1 ถ้าวงค์เส้นโค้งที่กำหนดให้เป็นวงค์ของเส้นตรงที่ขนานกับแกน x ทราเจกทอรีมูมจากจะเป็นวงค์ของเส้นตรงที่ขนานกับแกน y ในทางกลับกัน ถ้ากำหนดวงค์ของเส้นตรงที่ขนานกับแกน y จะได้ทราเจกทอรีมูมจากคือวงค์ของเส้นตรงที่ขนานกับแกน x



กรณี 2 ถ้าวงค์เส้นโค้งที่กำหนดให้เป็นวงค์เส้นโค้งอื่นที่มีใช้กรณี 1 สมมติว่า ณ จุด (x,y) ที่โค้งผ่าน ค่าความชันของโค้งเป็น



$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

จะได้ความชันของทราเจกทอรีมูมจากเป็น

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{F(x, y)}$$

โดย y ในสมการหลัง หมายถึง y ของทราเจกทอรี จากความรู้ดังกล่าวนี้ เราจะได้แนวทางการแก้ปัญหาทราเจกทอรีมูมจากดังต่อไปนี้

เมื่อโจทย์กำหนดวงค์เส้นโค้งมาให้

ขั้น 1 หาสมการเชิงอนุพันธ์ของวงค์เส้นโค้ง (โดยวิธีกำจัดตัวคงค่าไม่เจาะจง) สมมติได้

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

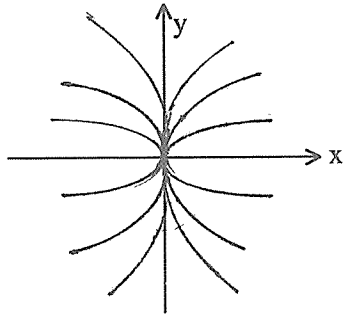
ขั้น 2 สร้างสมการเชิงอนุพันธ์ของทราเจกทอรีมูมจากจะได้

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x, y)}$$

เพราะความชันของโค้งกับทราเจกทอรีมูมจากคูณกันได้ -1

ขั้น 3 แก้สมการที่ได้ในขั้น 2 จะได้สมการของทราเจกทอรีมูมจากตามต้องการ

ตัวอย่าง 3.2.1 จงหาทราเจกทอรีมุลากของวงศ์ของพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดที่จุดกำเนิด และจุดโฟกัสอยู่บนแกน x



วิธีทำ สมการของวงศ์ของพาราโบลาชุดนี้คือ

$$y^2 = 4ax$$

จะได้ $2yy' = 4a$ แทนค่าได้

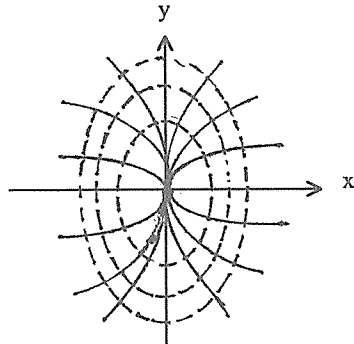
$$\text{แทนค่า } y^2 = 2xyy'$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} \text{ ณ } (x, y) \neq (0,0)$$

ซึ่งสมการนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของพาราโบลา

ดังนั้น สมการเชิงอนุพันธ์ของทราเจกทอรีมุลากคือ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y}$$



แก้สมการ $y dy = -2x dx$

$$\frac{y^2}{2} + x^2 = c$$

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{2c^2} = 1$$

ทราเจกทอรีมุลากจะเป็นวงศ์ของวงรี

ที่จุดศูนย์กลางอยู่ ณ จุดกำเนิด แกนเอกอยู่บน

แกน y ขนาด $\sqrt{2}$ เท่าของแกนโท

ตัวอย่าง 3.2.2 จงหาทราเจกทอรีมุลากของวงศ์เส้นโค้งต่อไปนี้

ก. วงศ์ของเส้นตรง $x - 4y = c_1$

ข. วงศ์ของไฮเพอร์โบลา $x^2 - y^2 = c_1$

ค. วงศ์ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลาง ณ $(0, 0)$ และจุดยอดที่ $(1, 0)$, $(-1, 0)$

วิธีทำ ก. เขียนสมการใหม่ได้ $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}c_1$ เป็นเส้นตรงที่มีความชัน $\frac{1}{4}$

ทราเจกทอรีมุลากจะเป็นวงศ์ของเส้นตรงที่มีความชัน -4 นั่นคือ มีสมการเป็น

$$y = -4x + c_2$$

(ให้เป็นแบบฝึกหัดวิเคราะห์รายละเอียดเอง)

ข. หาอนุพันธ์เทียบกับ x ได้

$$2x - 2y y' = 0$$

$$y' = \frac{x}{y}$$

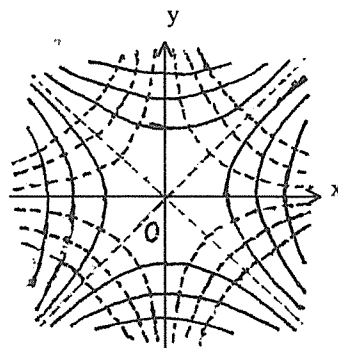
ดังนั้น สมการเชิงอนุพันธ์ของทราเจกทอรี

มีผลก็คือ

$$y' = -\frac{x}{y}$$

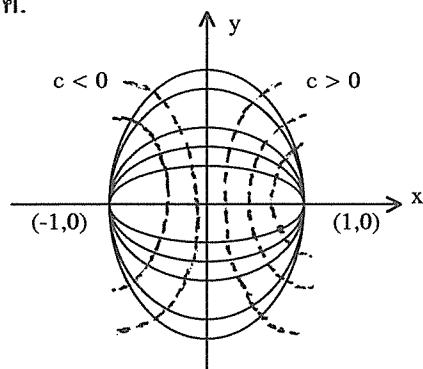
$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0$$

$$xy = c$$



ทราเจกทอรีเป็นไฮเพอร์โบลามุมฉากที่มีแกน x แกน y เป็นเส้นกำกับ

ก.



สมการวงรี คือ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \dots\dots\dots(a)$$

คูณสมการนี้ด้วย b^2 แล้วหาอนุพันธ์เทียบกับ x

$$2b^2 x + 2y y' = 0$$

$$\frac{2}{b^2} = -\frac{yy'}{x}$$

แทนค่าใน (a) ได้ $\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{-\frac{xy}{y'}} = 1$

$$\frac{x^2}{x^2} - \frac{xy}{y'} = 1$$

$$y' = \frac{xy}{x^2 - 1}$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของวงรี

ดังนั้น สมการเชิงอนุพันธ์ของทราเจกทอรีมีผลก็คือ

$$y' = -\frac{x^2 - 1}{xy}$$

$$\left(\frac{x^2 - 1}{x}\right) dx + y dy = 0$$

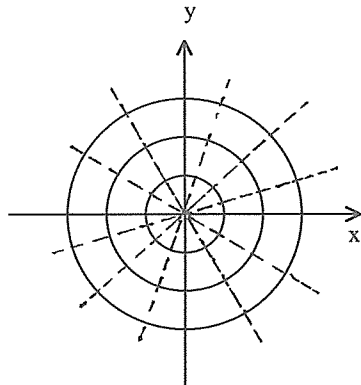
$$\left(x - \frac{1}{x}\right) dx + y dy = 0$$

$$\frac{x^2}{2} - \ln|x| + \frac{y^2}{2} = \ln c$$

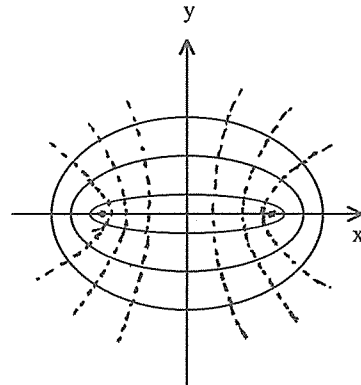
หรือ $Cx = e^{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}$

จงสังเกตว่า ถ้า $F(x, y, c) = 0$ เป็นทราเจกทอรีมีผลของ $G(x, y, b) = 0$ จะได้ $G(x, y, b) = 0$ เป็นทราเจกทอรีมีผลของ $F(x, y, c) = 0$ ด้วย สมมติว่าเราจะเขียนกราฟของ $Cx = e^{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}$ เราอาจเขียนได้โดยอาศัยทราเจกทอรีมีผลของมันเป็นแนวทางได้

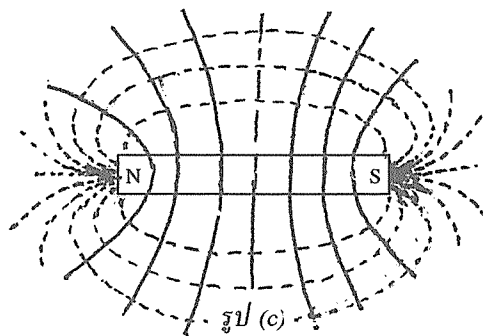
ตัวอย่างทราเจกทอรีมุลากอื่น ๆ ได้แก่วงศ์ของเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด และวงศ์ของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง ณ จุดกำเนิดเป็นทราเจกทอรีมุลากซึ่งกันและกัน วงศ์ของวงรีและไฮเพอร์โบลาที่มีจุดโฟกัสร่วมกันเป็นทราเจกทอรีมุลากซึ่งกันและกัน ในฟิสิกส์และวิศวกรรมมีการประยุกต์เรื่องทราเจกทอรีมุลากจำนวนมาก ตัวอย่างง่าย ๆ จากรูป (c) NS เป็นแท่งแม่เหล็ก N เป็นขั้วเหนือ S เป็นขั้วใต้ เราใส่ผงตะไบเหล็กแล้วผงตะไบเหล็กจะเรียงตัวเป็นแนว แนวแต่ละเส้นเรียกว่าเส้นแรง และโค้งที่ตั้งฉากกับเส้นแรงเรียกว่าเส้นศักย์เท่า (equipotential line) สนามเส้นแรงกับเส้นศักย์เท่าจะเป็นทราเจกทอรีมุลากซึ่งกันและกัน



รูป (a)



รูป (b)



รูป (c)

ทราเจกทอรีมุลากเท่า (isogonal trajectories)

การสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ของทราเจกทอรีมุลากอีกวิธีหนึ่งคือจากสมการเชิงอนุพันธ์ของโค้ง

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \dots \dots \dots (1)$$

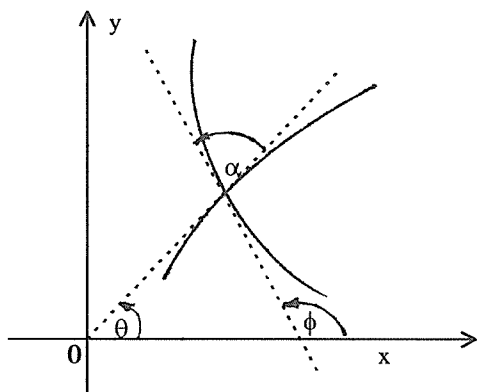
เราอาจแทน $\frac{dy}{dx}$ ในสมการซ้ายมือ (ซึ่งถือว่า y เป็นโค้ง) ด้วย $-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ ซึ่งจะได้

$$\boxed{-\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = F(x, y)} \quad (y \text{ ในสมการนี้แทนทราเจกทอรี})$$

$$\dots \dots \dots (2)$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของทราเจกทอรี

โดยวิธีเดียวกันนี้ เราอาจขยายจากทราเจกทอรีมุมฉากเป็นการศึกษาทราเจกทอรีมุมเท่าใดก็ได้ โดยขั้นแรกหาความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{dy}{dx}$ ของโค้งกับ $\frac{dy}{dx}$ ของทราเจกทอรี



สมมติทราเจกทอรี T ทำมุมกับโค้ง C เป็นมุมคงค่า α ณ จุด (x, y) ให้เส้นสัมผัสโค้ง C ทำมุมแกน x เป็น θ ทราเจกทอรี T ทำมุมแกน x เป็น ϕ

$$\text{จะได้ } \phi - \theta = \alpha$$

$$\theta = \phi - \alpha$$

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\phi - \alpha) \\ &= \frac{\tan \phi - \tan \alpha}{1 + (\tan \alpha) \tan \phi} \dots\dots\dots(3) \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\tan \theta$ คือค่า y' ของโค้ง และ $\tan \phi$ คือ y' ของทราเจกทอรี สมมติ สมการเชิงอนุพันธ์ของโค้งเป็น

$$F(x, y, y') = 0$$

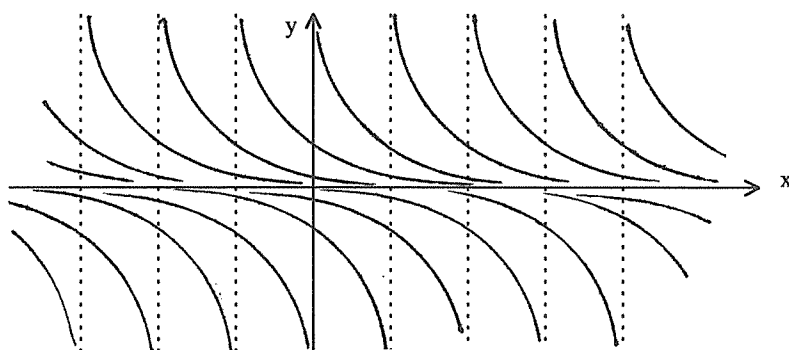
แทนค่า y' ด้วยค่าขวามือของ (3) จะได้

$$F\left(x, y, \frac{y' - \tan \alpha}{1 + (\tan \alpha)y'}\right) = 0$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของทราเจกทอรี

ตัวอย่าง 3.2.3 จงหาทราเจกทอรีมุมเท่าที่ตัดกับไฮเพอร์โบลาต่อไปนี้เป็นมุม 45°

$$y(x - c) = 1$$



วิธีทำ กำจัด c

$$\text{จากสมการที่เขียนใหม่ } x - c = \frac{1}{y}$$

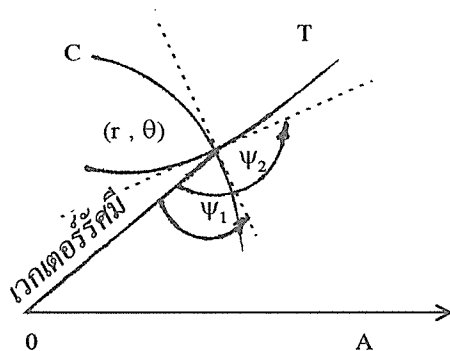
$$\text{หาอนุพันธ์เทียบกับ } x, \quad 1 = -\frac{1}{y^2} y'$$

$$y' = -y^2 \quad \text{เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของไฮเพอร์โบลา}$$

ดังนั้น สมการเชิงอนุพันธ์ของทราเจกทอรี คือ

$$\begin{aligned}
 \frac{y' - \tan 45^\circ}{1 + (\tan 45^\circ)y'} &= -y^2 \\
 \frac{y' - 1}{y' + 1} &= -y^2 \\
 y' &= \frac{1 - y^2}{1 + y^2} \\
 \text{แก้สมการ } \left(\frac{1 - y^2}{1 + y^2}\right) dy &= dx \\
 \left(-1 + \frac{1}{1 + y} + \frac{1}{1 - y}\right) dy &= dx \\
 -y + \ln |1 + y| - \ln |1 - y| &= x + \ln c \\
 \ln \frac{|1 + y|}{c|1 - y|} &= x + y \\
 1 + y &= C(1 - y) e^{(x + y)} \\
 \text{เป็นทราเจกทอรีตามต้องการ}
 \end{aligned}$$

ทราเจกทอรีมุมฉาก ในระบบพิกัดเชิงขั้ว



บททวน : ถ้า ψ เป็นมุมที่เส้นสัมผัสโค้งทำกับเวกเตอร์รัศมี เราได้

$$\tan \psi = r \frac{d\theta}{dr}$$

สมมติว่า ณ จุด (r, θ) ใด ๆ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว โค้ง C ตัดกับทราเจกทอรี T เป็นมุมฉาก

ψ_1 เป็นมุมที่เส้นสัมผัสโค้ง C ทำกับเวกเตอร์รัศมี

ψ_2 เป็นมุมที่เส้นสัมผัสทราเจกทอรี T ทำกับเวกเตอร์รัศมี

$$\text{จะได้ } \psi_2 = 90^\circ + \psi_1$$

$$\therefore \tan \psi_2 = \tan(90^\circ + \psi_1)$$

$$= -\cot \psi_1$$

$$= -\frac{1}{\tan \psi_1}$$

$$\text{ดังนั้น } \tan \psi_1 = -\frac{1}{\tan \psi_2}$$

โดยความรู้ี้ เรามีแนวทางหาทราเจกทอรีมุมฉากในระบบพิกัดเชิงขั้วได้ดังนี้

สมมติวงค์เส้นโค้งที่กำหนดให้มีสมการเชิงอนุพันธ์เป็น

$$P(r, \theta) dr + Q(r, \theta) d\theta = 0$$

เราจะหาค่า $r \frac{d\theta}{dr}$ ก่อน จากสมการเราได้ว่า

$$\frac{d\theta}{dr} = -\frac{P}{Q}$$

$$\therefore r \frac{d\theta}{dr} = -\frac{rP}{Q}$$

ดังนั้น สมการเชิงอนุพันธ์ของทราเจกทอรีมูจก คือ

$$-\frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} = -\frac{rP}{Q} \quad \left[\tan \psi_1 = -\frac{1}{\tan \psi_2} \right]$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2 P}{Q}$$

หรือ

$$Q dr - r^2 P d\theta = 0$$

ข้อสังเกต สมการเชิงอนุพันธ์ในระบบเชิงขั้ว มิได้พาดพิงถึงความชันของกราฟ แต่พาดพิงถึงมุมที่รัศมีเวกเตอร์ทำกับเส้นสัมผัสโค้ง

ตัวอย่าง 3.2.4 จงหาทราเจกทอรีมูจกของวงค์เส้นโค้งรูปหัวใจ

$$r = a(1 + \cos \theta)$$

วิธีทำ จัดสมการได้

$$\frac{r}{1 + \cos \theta} = a$$

$$(1 + \cos \theta) dr - r(-\sin \theta) d\theta = 0$$

$$r \frac{d\theta}{dr} = -\left(\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}\right)$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของเส้นโค้งรูปหัวใจ (Cardioid)

ดังนั้น สมการเชิงอนุพันธ์ของทราเจกทอรี คือ

$$-\frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} = -\left(\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}\right)$$

แก้สมการ

$$\frac{dr}{r} = \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} d\theta$$

$$\ln |r| = \ln |\csc \theta - \cot \theta| + \ln |\sin \theta| + \ln B$$

$$\therefore r = b \sin \theta (\csc \theta - \cot \theta)$$

$$= b(1 - \cos \theta)$$

ซึ่งเป็นสมการของทราเจกทอรีมูจก

8. ถ้า c เป็นตัวคงค่าบวกตัวหนึ่ง และ a เป็นพารามิเตอร์บวกแล้ว $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ เป็น

สมการของวงรี (ถ้า $a > c$) และไฮเพอร์โบลา (ถ้า $a < c$) ซึ่งมีโฟกัสที่จุด $(\pm c, 0)$ จง

แสดงว่าวงรีของภาคตัดกรวยชุดนี้เป็นทราเจกทอรีมุมฉากของตัวเอง

จงหาทราเจกทอรีมุมฉากของวงรีเส้นโค้ง ในข้อ 9-15

9. $r = a \cos^2 \theta$

10. $r = a \cos 2\theta$

11. $r = 2a \sin \theta$

12. $r = 4a \sec \theta \tan \theta$

13. $r = a(1 - 2 \sin \theta)$

14. $r = a(\sec \theta + \tan \theta)$

15. $r = a \sin \theta \tan \theta$

คำตอบแบบฝึกหัด 3.2

1. $2x^2 + 3y^2 = k^2$

2. $my^2 = 2(x - c)$

3. $y^a = kx^b$

4. $y^3 = -3 \ln |kx|$

5. วงรีของวงกลมผ่านจุดกำเนิด และจุดศูนย์กลางอยู่บนแกน y

6. $(x + 1)^2 + y^2 = a^2$

7. $y^2 = x^2(3x + 1)$

9. $r^2 = b \sin \theta$

10. $r^4 = b \sin 2\theta$

11. $r = 2b \cos \theta$

12. $r^2(1 + \sin^2 \theta) = b^2$

13. $r^2 = b \cos \theta(1 + \sin \theta)$

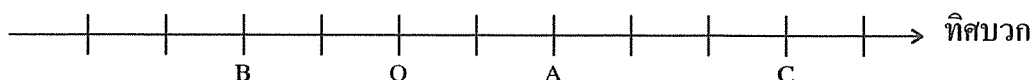
14. $r = be^{-\sin \theta}$

15. $r^2 = b(1 + \cos \theta)$

3.3 การประยุกต์ทางกลศาสตร์

3.3.1 ตัวอย่างในวิชาจลนพลศาสตร์ (Dynamics)

ปริมาณกระจัด, ความเร็วและความเร่ง ในกรณีที่เราศึกษาการเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวเส้นตรง เมื่อกำหนดตำแหน่ง 0 บนเส้นตรง และทิศบวกของเส้นตรงแล้ว เราสามารถใช้จำนวนจริงที่ปลายลูกศรของปริมาณกระจัด (displacement) แทนปริมาณกระจัดนั้นได้* ดังรูปตัวอย่าง



เราได้ $\overline{OA} = 2$, $\overline{OC} = 5$, $\overline{OB} = -2$

* เนื่องจาก มีฟังก์ชันถอดแบบ (isomorphism) จากเซตของเวกเตอร์ดังกล่าวไปบนเซตของจำนวนจริง (ปริมาณกระจัดเป็นเวกเตอร์)

ถ้า x เป็นปริมาณกระจัด และ t เป็นเวลาที่วัตถุใช้ในการเคลื่อนที่

เราจะได้ ความเร็ว $v = \frac{dx}{dt}$

และความเร่ง $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

โมเมนตัมของวัตถุ $= mv$ (m เป็นมวลของวัตถุ)

อนึ่ง ถ้า v เป็นฟังก์ชันของ x เราจะสามารถจัดรูป

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

กฎสามประการของนิวตัน

เมื่อเราออกแรงยกกล่อง ซึ่งเราคิดว่าบรรจุของที่หนักมาก แต่ภายในกล่องไม่มีอะไร เมื่อและกล่องจะโผล่ขึ้นอย่างรวดเร็วจนเราตกใจ ข้อเท็จจริงคือแรงที่เรายก แยกเป็นสองส่วนคือแรงกิริยาที่หักล้างกับแรงต้านหรือแรงปฏิกิริยาของกล่องส่วนหนึ่ง กับแรงที่ทำให้วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร่งอีกส่วนหนึ่ง นี่เป็นตัวอย่างแสดงว่าแรงที่เราใช้ไม่จำเป็นต้องเท่ากับแรงกิริยา

กฎ 3 ข้อ ของนิวตัน มีดังนี้

1. กรณีที่ไม่มีแรงภายนอกมากระทำ (ผลรวมของแรงภายนอกเป็น 0)

วัตถุจะคงสภาพหยุดนิ่ง หรือเคลื่อนที่ไปในแนวเส้นตรงด้วยความเร็วคงที่

2. กรณีที่มีแรงภายนอกมากระทำ

อัตราการเปลี่ยนโมเมนตัมของอนุภาคเป็นปฏิภาคโดยตรงกับแรงที่กระทำ และมีทิศทางไปทางเดียวกับทิศของแรงนั้น

3. แรงกิริยา (action) และแรงปฏิกิริยา (reaction) มีขนาดเท่ากันและมีทิศทางตรงกันข้าม

หมายเหตุ เนื่องจากอัตราการเปลี่ยนโมเมนตัมคือ $\frac{d}{dt} mv = m \frac{dv}{dt} = ma$ เราได้ $F \propto ma$

และได้ $F = ma$ เมื่อหน่วยของ F เป็นหน่วยสัมบูรณ์

ระบบหน่วยและค่าคงที่ในวิชากลศาสตร์

	C.G.S	F.P.S	M.K.S.
1. น้ำหนัก	กรัม	ปอนด์	กิโลกรัม
2. แรง	ไดน์	เปาแฉล	นิวตัน
3. หน่วยความยาว	เซนติเมตร	ฟุต	เมตร
4. เวลา	วินาที	วินาที	วินาที
5. ค่าคงที่โน้มถ่วง เนื่องจากโลก (g)	981	32	9.8

หมายเหตุ 1. น้ำหนัก 1 สลัก = 32 ปอนด์ ในหน่วย F.P.S.

2. หาค่าคงที่โน้มถ่วง มีหน่วยเป็นระยะทาง/เวลา²

3. แรงเนื่องจากน้ำหนักเปลี่ยนให้เป็นแรงในหน่วยสัมบูรณ์ได้ โดยคูณด้วยค่าคงที่ g

ตัวอย่าง 3.3.1 ปล่อยวัตถุมวล m กรัมให้ตกลงสู่พื้น

ก. จงสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่

ข. จงหาความสัมพันธ์ระหว่างความเร็ว v กับเวลา t

ค. จงหาความสัมพันธ์ระหว่างความเร็ว v กับปริมาณกระจัด x

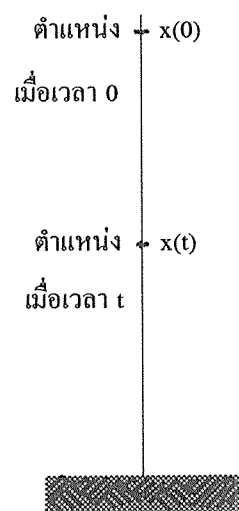
ง. จงหาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณกระจัด x กับเวลา t

วิธีทำ ให้จุดเริ่มปล่อยเป็นตำแหน่งสมดุล และทิศทางวัดลงเป็นบวก

เนื่องจาก $x = x(t)$ เป็นตำแหน่งของวัตถุ ณ เวลา t

จะได้ $x(0) = 0$

อนึ่ง $v(0) = 0$ เมื่อ $v(t)$ เป็นความเร็ว ณ เวลา t



ก. ตามกฎข้อ 2 ของนิวตัน

$$mg = m \frac{dv}{dt}^*$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = g}$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่

ข. เนื่องจากความเร็วต้น $v(0) = 0$ เราแก้สมการปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dv}{dt} = g, v(0) = 0$$

จากสมการเชิงอนุพันธ์เราได้

$$v = gt + c_1$$

แต่เมื่อ $t = 0$ ได้ $v = 0$ จึงจำเป็นที่ $0 = g \cdot 0 + c_1$ นั่นคือ $c_1 = 0$

ดังนั้น $\boxed{v = gt}$ เป็นความสัมพันธ์ระหว่างความเร็ว v กับเวลา t

ค. เนื่องจากวัตถุหล่น ไม่ย้อนกลับ ดังนั้น v เป็นฟังก์ชันของ x จาก $\frac{dv}{dt} = g$

$$\frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = g$$

$$v \frac{dv}{dx} = g$$

* แรงดึงดูดของโลกในหน่วยสัมบูรณ์เท่ากับมวลคูณกับค่าคงที่โน้มถ่วง g ซึ่ง

$$g = 981 \text{ ซม./วินาที}^2$$

$$\text{หรือ } g = 9.8 \text{ ม./วินาที}^2$$

หรือ $\frac{1}{2} v^2 = gx + c_2$
 แต่เมื่อ $x = 0$ ได้ $v = 0$ ดังนั้น จำเป็นที่

$$\frac{1}{2} \cdot 0 = g \cdot 0 + c_2 \text{ และ } c_2 = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2} v^2 = gx$$

หรือ $\boxed{\frac{v^2}{2} = 2gx}$

ง. จากข้อ ข. เราได้ $v = gt$

ดังนั้น $\frac{dx}{dt} = gt$
 $x = \frac{1}{2} gt^2 + c_3$

แต่เมื่อ $t = 0$ ได้ $x = 0$ จึงจำเป็นที่

$$0 = 0 + \frac{1}{2} g \cdot 0 + c_3$$

$\therefore c_3 = 0$ และ $\boxed{x = \frac{1}{2} gt^2}$

ตัวอย่าง 3.3.2 โซ่ขนาดสม่ำเสมอเส้นหนึ่งมีความยาว a วางบนโต๊ะผิวเรียบในแนวระดับและมีปลายส่วนหนึ่งห้อยลงมายาว b เริ่มจากสภาพนี้จนโซ่เลื่อนหลุดพ้นโต๊ะนับเป็นเวลาเท่าใด

วิธีทำ ให้ $x = x(t)$ เป็นความยาวโซ่ส่วนที่ห้อย

ลงมา ณ เวลา t

และ $v = v(x)$ เป็นความเร็วของโซ่ เมื่อส่วน
 ที่ห้อยลงมายาว x

จะได้ $x(0) = b$ และ $v(b) = 0$

เนื่องจากโซ่มีขนาดสม่ำเสมอจะได้ความหนาแน่นต่อหน่วยความยาวของโซ่มีค่าคงที่ให้ค่าคงที่นี้เป็น σ

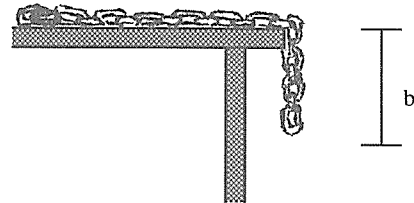
อนึ่ง ส่วนของโซ่ที่อยู่บนโต๊ะจะถูกแรงปฏิกิริยาของโต๊ะลบล้างหมด แรงที่ทำให้โซ่ทั้งเส้นเคลื่อนที่จึงเกิดจากโซ่ส่วนที่ห้อย สมมติ ณ เวลา t โซ่ห้อย x แรงที่ทำให้โซ่เคลื่อนที่จึงเป็น $g\sigma x$

โดยกฎข้อ 2 ของนิวตัน $g\sigma x = \sigma a \frac{dv}{dt}$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{gx}{a} \quad (\text{มี 3 ตัวแปร})$$

หรือ $\frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{g}{a} x$

หรือ $v \frac{dv}{dx} = \frac{g}{a} x \quad (\text{สมการนี้มี 2 ตัวแปร})$



$$\begin{aligned} \text{ได้} \quad \frac{1}{2} v^2 &= \frac{g}{2a} x^2 + c_1 \\ \text{เมื่อ } x = b \text{ ได้ } v = 0 \text{ ดังนั้น } c_1 &= -\frac{gb^2}{2a} \\ v^2 &= \frac{g}{a} (x^2 - b^2) \\ v &= \sqrt{\frac{g}{a}} \sqrt{x^2 - b^2} \\ \frac{dx}{dt} &= \sqrt{\frac{g}{a}} \sqrt{x^2 - b^2} \quad (\text{แทนค่า } v = \frac{dx}{dt}) \\ \sqrt{x^2 - b^2} &= \sqrt{\frac{g}{a}} t + c_2 \\ \text{เมื่อ } t = 0 \text{ ได้ } x = b \\ \text{ดังนั้น } \ln b &= 0 + c_2 \\ \text{แทนค่า } c_2 \text{ ได้ } \ln(x + \sqrt{x^2 - b^2}) &= \sqrt{\frac{g}{a}} t + \ln b \\ \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - b^2}}{b} &= \sqrt{\frac{g}{a}} t \\ \text{โจทย์ต้องการหาเวลา } t \text{ ซึ่ง } x(t) &= a \\ \text{แทนค่าได้ } \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right) &= \sqrt{\frac{g}{a}} t \\ t &= \sqrt{\frac{a}{g}} \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.3.3 ขณะที่เล่นเรือ แรงต้านทานของน้ำเป็นสัดส่วนโดยตรงกับความเร็วในขณะนั้น ปรากฏว่าเมื่อความเร็วเป็น 20 ฟุตต่อวินาที น้ำจะมีแรงต้าน 40 ปอนด์ ถ้าเรือหนัก 320 ปอนด์ และมีคนโดยสารหนัก 160 ปอนด์ และปรากฏว่าเครื่องยนต์เรือทำให้เกิดแรงขับเคลื่อน 50 ปอนด์ จงหา

- สมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่ของเรือ
- จงหาสูตรความเร็วและระยะทางที่เรือแล่น สมมติว่าเรือเริ่มออกแล่นเมื่อเวลา

$$t = 0$$

- หาความเร็วสูงสุดของเรือ

วิธีทำ ก. ให้ $v = v(t)$ เป็นความเร็วของเรือ ณ เวลา t จะได้แรงต้านของน้ำ

$$R \propto v$$

$$R = kv$$



เมื่อ $v = 20$ ได้ $R = 40$ ดังนั้น จำเป็นที่

$$40 = k \cdot 20$$

$$\text{และ } k = 2$$

ดังนั้น $R = 2v$

$\therefore$ โดยกฎข้อ 2 ของนิวตัน

$$(50 - 2v)g = (320 + 160) \frac{dv}{dt}$$

แต่ในระบบ F.P.S. เราได้ $g = 32$ ดังนั้น สมการเชิงอนุพันธ์คือ

$$15 \frac{dv}{dt} + 2v = 50$$

ข. แก้ปัญหา $15 \frac{dv}{dt} + 2v = 50$, $v(0) = 0$

จากสมการเชิงอนุพันธ์ เราได้

$$\frac{dv}{dt} + \frac{2}{15} v = \frac{10}{3}$$

$$\begin{aligned} v e^{\frac{2}{15}t} &= \int \frac{1}{3} e^{\frac{2}{15}t} dt \\ &= 25 e^{\frac{2}{15}t} + c_1 \end{aligned}$$

เมื่อ $t = 0$ ได้ $v = 0$ จำเป็นที่

$$0 = 25 + c_1 \text{ และ } c_1 = -25$$

ดังนั้น

$$v(t) = 25(1 - e^{-\frac{2}{15}t}) \dots\dots\dots (a)$$

ให้ s เป็นระยะทางที่เคลื่อนที่ได้ เราได้จากสมการ (a) ว่า

$$\frac{ds}{dt} = 25(1 - e^{-\frac{2}{15}t})$$

$$s = 25t + \frac{25 \times 15}{2} e^{-\frac{2}{15}t} + c_2$$

เมื่อ $t = 0$ ได้ $s = 0$ เราได้ $c_2 = -\frac{25 \times 15}{2}$ และได้

$$s(t) = 25t + \frac{345}{2} e^{-\frac{2}{15}t} - \frac{375}{2} \dots\dots\dots (b)$$

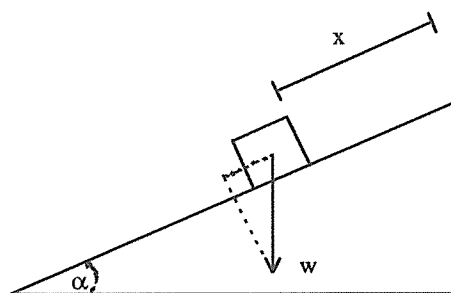
คำตอบที่ต้องการ คือ (a) และ (b)

- ก. จากสมการ (a) เนื่องจาก $e^{-\frac{2}{15}t}$ มากกว่า 0 และจะมีค่าลดลงเมื่อ t มากขึ้น ดังนั้น ความเร็วสูงสุด คือ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 25(1 - e^{-\frac{2}{15}t}) = 25 \text{ ฟุต/วินาที}$$

แบบฝึกหัด 3.3.1

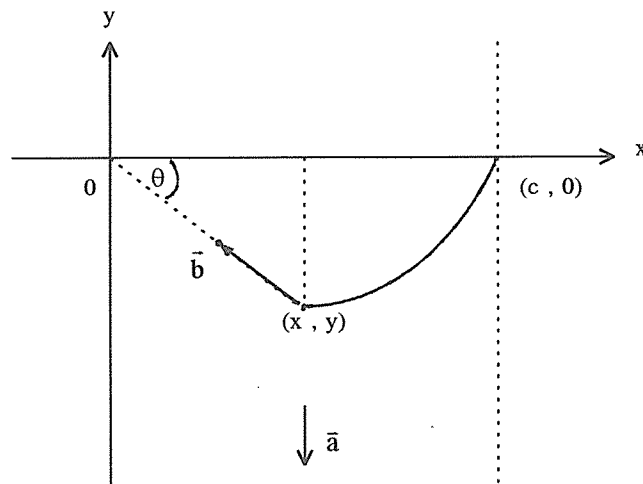
- วัตถุเคลื่อนที่ไปในแนวเส้นตรงด้วยความเร่งคงที่ a ถ้า v_0 เป็นความเร็วเมื่อ $t = 0$ v เป็นความเร็ว และ s เป็นระยะทางเมื่อเคลื่อนที่ไปได้ t หน่วยเวลา จงแสดงว่า
 - $v = v_0 + at$
 - $s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$
 - $v^2 = v_0^2 + 2as$
- นักวิ่งพสุธากับร่มน้ำหนักรวมเป็น w ปอนด์ เมื่อร่นกางนักโคตรมีความเร็ว v_0 ฟุตต่อวินาที ถ้าแรงต้านของอากาศ แปรผันตรงกับกำลังสองของความเร็ว และขณะที่มีแรงต้านอากาศ F ปอนด์นั้น ความเร็วเป็น V ฟุตต่อวินาทีพอดี
 - จงเขียนสมการเชิงอนุพันธ์ของความเร็วเป็นฟังก์ชันของเวลา และเขียนเป็นฟังก์ชันของระยะทาง
 - จงหาสูตรความเร็วในรูปเวลา t และหาความเร็วลิมิต (ความเร็วเมื่อ $t \rightarrow \infty$)
 - จงหาสูตรความเร็วในรูประยะทาง
- ในรูป น้ำหนัก w ปอนด์ เคลื่อนลงตามพื้นเอียงที่ทำมุม α กับแนวระดับ ถ้าไม่มีแรงอื่นนอกจากแรงโน้มถ่วงกระทำกับน้ำหนัก (นั่นคือไม่มีแรงเสียดทาน , แรงต้านของอากาศ ฯลฯ) เมื่อเวลา $t = t_0$ ให้ $x = x_0$ และ $v = v_0$ จงหาสูตรของ x สำหรับ $t > 0$



- แกน y และเส้น $x = c$ เป็นฝั่งแม่น้ำ ซึ่งมีน้ำไหลลงในอัตราเร็วคงที่ a ทางทิศลบของแกน y เรือดำน้ำอยู่ ณ จุด $(c, 0)$ หันหัวพุ่งตรงไปที่จุดกำเนิดแล้วด้วยอัตราเร็ว b สัมพัทธ์กับน้ำ จงหาทางของเรือ (ข้อแนะ : หาส่วนประกอบของความเร็วเรือในแกน x, y ได้

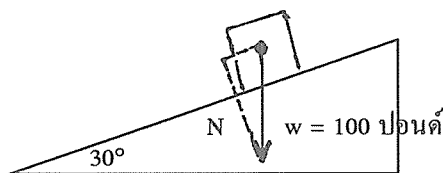
$$\frac{dx}{dt} = -b \cos \theta, \frac{dy}{dt} = -a + b \sin \theta$$

แล้วหา $\frac{dy}{dx}$)



5. โข้ยาว 4 ฟุต วางอยู่บนโต๊ะเรียบโดยมีชายโข้ยาว 1 ฟุตห้อยลงมา ถ้าโต๊ะไม่มีแรงเสียดทาน จะเสียเวลาเท่าไรที่โข้ยหลุดพ้นโต๊ะ
6. วัตถุหนัก 1000 ปอนด์ จมคั้งลงในน้ำ มีแรงต้านสองแรงคือแรงลอยตัว 200 ปอนด์ และแรงต้านของน้ำ เนื่องจากการเคลื่อนที่เป็น $100v$ เมื่อ v เป็นความเร็วมีหน่วยเป็นฟุตต่อวินาที จงหาระยะที่มันจมลงใน 5 วินาที และความเร็วลิมิต

7.



น้ำหนัก 100 ปอนด์ เคลื่อนลงบนระนาบซึ่งเอียงทำมุม 30 องศา ถ้าสัมประสิทธิ์ของแรงเสียดทานเป็น 0.2

- ก. จงหาระยะเมื่อน้ำหนักเคลื่อนไปได้ 5 วินาที
ข. จงหาความเร็วและความเร่งเมื่อเคลื่อนไปได้ 5 วินาที

(ข้อแนะ : จากรูปความเสียดทานเท่ากับแรงประกอบ N ในแนวตั้งฉากคูณกับสัมประสิทธิ์ของความเสียดทาน)

8. คาวเทียมหมุนรอบวงโคจรของมันเป็นด้วยแรงต้านทานเป็นสัดส่วนกับกำลังสองของอัตราเร็วขณะนั้น

- ก. ถ้าอัตราเร็วเป็น v_0 เมื่อเวลา $t = 0$ และ v_1 เมื่อ $t = T_1$ จงแสดงว่าอัตราเร็ว ณ เวลา t ใดๆ คือ

$$v = \frac{v_0 v_1 t_1}{v_1 T_1 + (v_0 - v_1)t}$$

ข. จงแสดงว่าจำนวนรอบของการหมุนระหว่างเวลา $t = t_0$ ถึง $t = T_1$ คือ

$$\frac{v_0 v_1 T_1}{p(v_0 - v_1)} \ln \left(\frac{v_0}{v_1} \right)$$

ค. จงแสดงว่าดาวเทียมหมุนไปเรื่อย ๆ ไม่สิ้นสุด แม้ว่าอัตราเร็วจะลดลง

9. รถยนต์คันหนึ่งหนัก 1.5 ตัน เริ่มเคลื่อนที่ใช้แรงขับเคลื่อนที่ 600 ปอนด์ ถ้าแรงต้านทานการเคลื่อนที่เป็น $90 + v^2/40$ ปอนด์ (เมื่อ v เป็นอัตราเร็วมีหน่วยเป็นฟุตต่อวินาที) จากนั้นไปอีกนานเท่าใดเขาจึงจะมีอัตราเร็ว 60 ไมล์ต่อชั่วโมง

10. แรงต้านการเคลื่อนที่ของขบวนรถไฟ มีค่าคงที่เป็น 140 ปอนด์ต่อ 1 ตัน เมื่อผ่านไปด้วยความเร็วที่ V ฟุตต่อวินาที ในแนวราบ รถไฟขึ้นเนินซึ่งมีความชัน 1 ใน 160 สมมติเครื่องจักรยังทำงานตามอัตราปกติ และอัตราการขึ้นเนินเป็น v ฟุตต่อวินาที

ก. เมื่อรถไฟขึ้นเนินไปได้ t วินาที จงแสดงว่า สมการของการเคลื่อนที่เป็น

$$2240 \frac{dv}{dt} = \left(\frac{140V}{v} - 154 \right) g$$

ข. ถ้าสมมติรถไฟขึ้นได้ระยะทาง s ฟุตใน t วินาที จงแสดงว่า

$$v^2 = V^2 - g(11s - 10Vt)/80$$

คำตอบแบบฝึกหัด 3.3.1

2. ก. $g(W - \frac{F}{V^2} v^2) = W \frac{dv}{dt}$ และ $g(W - \frac{F}{V^2} v^2) = W v \frac{dv}{dx}$

ข. $v = p \left[\frac{(p+v_0)e^{\alpha t} - (p-v_0)}{(p+v_0)e^{\alpha t} + (p-v_0)} \right]$ เมื่อ $p = V\sqrt{\frac{W}{F}}$, $\alpha = \frac{2g}{V}\sqrt{\frac{F}{W}}$

ความเร็วลิมิต $= p = V\sqrt{\frac{F}{W}}$ ถ้า $v_0 = 0$, $v = p \left[\frac{e^{\alpha} - 1}{e^{\alpha} + 1} \right] = p \tanh \frac{\alpha t}{2}$

ค. $v = \sqrt{p^2 - (p^2 - v_0^2)e^{-2kx}}$ เมื่อ $p = V\sqrt{\frac{W}{F}}$, $k = Fg/WV^2$

3. $x = \frac{1}{2} gt^3 \sin \alpha + v_0 t + x_0$

4. $y + \sqrt{x^2 + y^2} = c x^{\frac{a}{b}} + 1$

5. $\sqrt{\frac{4}{g}} \ln(4 + \sqrt{15})$ วินาที

6. 37.5 ฟุต, 8 ฟุตต่อวินาที

7. ก. 130.8 ฟุต

ข. 52.3 ฟุต/วินาที, 10.5 ฟุต/(วินาที)²

9. 21 วินาที

3.3.2 ปัญหาพลศาสตร์ ซึ่งวัตถุที่เคลื่อนที่มีมวลเป็นตัวแปร

ในการใช้กฎข้อ 2 ของนิวตัน กรณีที่วัตถุเคลื่อนที่มีมวลเป็นตัวแปร จำเป็นที่ต้องแยกแยะโมเมนตัมที่เกิดจากแรง F กับโมเมนตัมที่เกิดจากมวลที่เสริมมาจากข้างนอก

ให้ $v = v(t)$ เป็นความเร็วของมวล ณ เวลา t

$m = m(t)$ เป็นมวล ณ เวลา t

w เป็นความเร็วของมวลเสริมสัมพัทธ์กับวัตถุ

$\frac{dm}{dt}$ อัตราเสริมมวล

จะได้ว่า อัตราการเปลี่ยนโมเมนตัมของมวลเสริม คือ แรงเสริมซึ่งเท่ากับ

$$(v+w) \frac{dm}{dt}$$

ตามกฎข้อ 2 ของนิวตัน จึงได้ว่า

$$\text{แรงลัพธ์ คือ } (v+w) \frac{dm}{dt} + F = \frac{d}{dt}(mv)$$

จัดรูปให้ง่ายได้

$$w \frac{dm}{dt} + F = m \frac{dv}{dt}$$

ข้อสังเกต $\frac{dm}{dt}$ เป็นบวกเมื่อได้มวลเพิ่ม เป็นลบเมื่อสูญเสียมวลไป

w เป็นบวกหรือลบ เมื่อทิศทางของความเร็วสัมพัทธ์ไปตาม v หรือสวนกับ v

ตัวอย่าง 3.3.4 (จรวด) การเคลื่อนที่ของจรวด อาศัยหลักการเผาไหม้ของเชื้อเพลิงในอัตราคงที่ เกิดแรงผลักดันจรวดให้พุ่งขึ้นจากผิวโลก

สมมติ ให้ k = อัตราเชื้อเพลิงเหลวที่ใช้ (ก.ก./วินาที)

c = อัตราเร็วของแก๊สที่พุ่งออกจากจรวด (ม./วินาที)

m_0 = มวลทั้งหมดของจรวดก่อนยิงซึ่งรวมเชื้อเพลิง b ก.ก.

ซึ่งเชื้อเพลิงจะถูกไหม้ได้ถึง $t = \frac{b}{k}$ วินาที

สำหรับ $0 \leq t \leq \frac{b}{k}$ ให้ $m(t)$ = มวลของจรวด ณ เวลา t

$v(t)$ = ความเร็วของจรวด ณ เวลา t

จงหาสูตรความเร็วของจรวด และความเร็วของจรวดเมื่อเชื้อเพลิงหมดพอดี

วิธีทำ แรงที่โลกดึงดูดจรวด ณ เวลา $t = -gm$

แรงทะยานของจรวดเนื่องจากการใช้เชื้อเพลิง $-c(\frac{dm}{dt}) = -c(-k) = ck$

$\therefore$ แรงลัพธ์ $F(t) = -gm + ck$

ดังนั้น สมการของการเคลื่อนที่ คือ

$$ck - gm = m \frac{dv}{dt}$$

แต่ $m(t) = m_0 - kt$ ดังนั้น

$$ck - g(m_0 - kt) = (m_0 - kt) \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{ck}{m_0 - kt} - g$$

$\therefore v = -c \ln(m_0 - kt) - gt + A$

เมื่อ $t = 0$ ได้ $v = 0$ ดังนั้น

$$\therefore 0 = -c \ln m_0 + A \text{ และ } A = c \ln m_0$$

$$\therefore \boxed{v(t) = c \ln \frac{m_0}{m_0 - kt} - gt, \quad 0 \leq t \leq \frac{b}{k}}$$

ความเร็วของจรวดเมื่อเชื้อเพลิงหมด คือ

$$\begin{aligned} v\left(\frac{b}{k}\right) &= c \ln \frac{m_0}{m_0 - k\left(\frac{b}{k}\right)} - \frac{gb}{k} \\ &= c \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - b} \right) - \frac{gb}{k} \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 3.8.2

- จรวดมวล 25,000 ก.ก. มีเชื้อเพลิง 20,000 ก.ก. ซึ่งเชื้อเพลิงถูกไหม้พุ่งออกด้วยความเร็ว 400 เมตร/วินาที อัตราการใช้เชื้อเพลิงเป็น 1000 ก.ก. ต่อวินาที จรวดเริ่มต้นอยู่กับที่ และแรงภายนอกที่เท่ากับจรวดคือแรงโน้มถ่วง (ไม่คิดระยะใกล้ไกล)
 - จงหาความเร็วของจรวด เมื่อครบ 15, 20 และ 30 วินาที
 - จงหาความสูงของจรวด เมื่อใช้เชื้อเพลิงหมดไปได้ครั้งหนึ่ง
- จรวดมีมวล m_1 มีเชื้อเพลิงมวล m_2 ยิงจรวดด้วยการเผาไหม้เชื้อเพลิง ในอัตราคงที่ a (จึงได้ $\frac{dm}{dt} = -a$) ขับเชื้อเพลิงพุ่งออกมาด้วยความเร็ว b สัมพัทธ์กับจรวด ถ้าคิดแรงภายนอกเฉพาะแรงโน้มถ่วง mg (สมมติ g คงที่) จงหาความเร็วและความสูงของจรวดขณะที่ใช้เชื้อเพลิงหมดพอดี
- หยาดน้ำฝนเม็ดกลมเริ่มต้นจากการอยู่กับที่ตกลงมาด้วยแรงโน้มถ่วงถ้าหยาดน้ำฝนนี้เก็บไอน้ำที่มันผ่านในอัตราที่เป็นสัดส่วนกับผิว (สมมติ ไอน้ำความเร็วเป็น 0) และเริ่มด้วยหยาดน้ำฝนมีรัศมี 0 จงแสดงว่า หยาดน้ำฝนนี้ตกด้วยความเร่ง $g/4$
- หยาดน้ำฝนเม็ดกลมตกลงมาท่ามกลางหมอก ซึ่งกระจายสม่ำเสมอ เก็บหมอกที่มันผ่าน ดังนี้ ถ้าหยาดน้ำฝนเริ่มต้นมีรัศมี 0 จงแสดงว่ามันตกสู่โลกด้วยความเร่ง $g/4$
- ทฤษฎีสัมพัทธภาพ บทพิเศษของไอน์สไตน์กล่าวว่า มวล m ของอนุภาคซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v มีสูตร

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

เมื่อ c เป็นความเร็วแสง และ m_0 เป็นมวลของอนุภาคเมื่อมันหยุดนิ่ง กำหนดให้ความเร็วสัมพัทธ์ w ของมวลที่เพิ่มขึ้นเป็น $-v$
 ถ้าอนุภาคเริ่มต้นจากหยุดนิ่ง และเคลื่อนที่ในอวกาศว่างเปล่ามาช้าๆ ด้วยอิทธิพลของสนามโน้มถ่วงที่คงที่ จงหาสูตรของความเร็ว v และแสดงว่า $v \rightarrow c$ เมื่อ $t \rightarrow \infty$

คำตอบแบบฝึกหัด 3.3.2

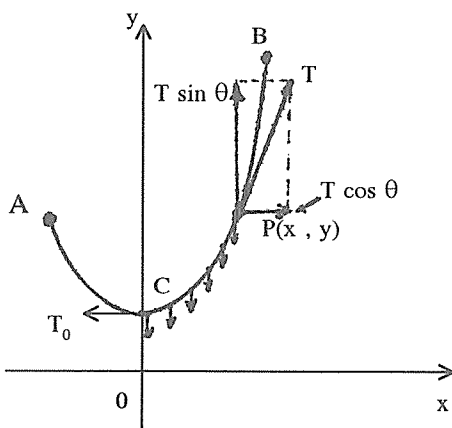
1. ก. 220 ม./วินาที, 448 ม./วินาที และ 30 ม./วินาที ข. 445 เมตร

2. $\frac{b}{m} \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) - \frac{gm_2}{a}$ และ $\frac{-gm_2^2}{2a^2} + \frac{bm_2}{a} + \frac{bm_1}{a} \ln \frac{m_1}{m_1 + m_2}$

5. $v = c \left(\frac{1 - e^{-2At/c}}{1 + e^{-2At/c}} \right)$ เมื่อ $A =$ ค่าคงที่ของสนามโน้มถ่วง

3.3.3 ตัวอย่างในวิชาสถิตยศาสตร์ (Statics)

ตัวอย่าง 3.3.5 (โซ่ที่ห้อยแขวน) จงหารูปร่างธรรมชาติของโซ่สม่ำเสมอเปลี่ยนรูปได้ (flexible) ที่ตรึงกับจุดสองจุดที่ต่างลงมาตามน้ำหนักของมันเอง



วิธีทำ ตั้งแกนพิกัดให้แกน y ผ่านจุดต่ำสุดของโซ่ แกน x ในแนวระดับ ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใดๆ บนโซ่ และ $y = f(x)$ พิจารณาระบบแรงที่กระทำกับโซ่ เริ่มจากส่วนที่ต่ำสุด C ถึงจุด P ได้แก่ แรงที่เกิดจากน้ำหนักโซ่ และแรงดึงให้ σ เป็นความหนาแน่นต่อหน่วยความยาวของโซ่ จะได้น้ำหนักโซ่ นับจาก C ถึง P คือผลรวมของ σds หรือ $\int_0^x \sigma \sqrt{1+(y')^2} dt$

ที่ C ให้มีแรงดึง T_0 และที่จุด P มีแรงดึง $T(x)$ แยกแรงดึง T ในแนวแกน x และ y สมมติว่า T ทำมุมกับแนวระดับเป็นมุม θ เนื่องจากโซ่อยู่ในสภาพสมดุล จะได้

$$T \cos \theta = T_0 \quad \text{..... (a)}$$

$$T \sin \theta = \int_0^x \sigma \sqrt{1+(y')^2} dt \quad \text{..... (b)}$$

$$\frac{(b)}{(a)} ; \tan \theta = \frac{1}{T_0} \int_0^x \sigma \sqrt{1+(y')^2} dt$$

เนื่องเพราะ $\frac{dy}{dx} = \tan \theta$ และ σ คงที่เราได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sigma}{T_0} \int_0^x \sqrt{1+(y')^2} dt$$

$$\text{หาอนุพันธ์เทียบกับ } x, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sigma}{T_0} \sqrt{1+(y')^2}$$

$$\text{หรือ} \quad \frac{dp}{dx} = a \sqrt{1+p^2} \quad \text{เมื่อ } p = \frac{dy}{dx}, a = \frac{\sigma}{T_0}$$

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = a dx$$

$$\ln(p + \sqrt{1+p^2}) = ax$$

$$e^{ax} = p + \sqrt{1+p^2} \quad \text{.....(c)}$$

$$\therefore -e^{-ax} = -\frac{1}{p+\sqrt{1+p^2}} = p - \sqrt{1+p^2} \dots\dots\dots (d)$$

$$\frac{(c)+(d)}{2}; \quad p = \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}$$

$$y = \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2a} + c_2$$

c_2 คือระยะ OC เพื่อความง่ายของรูปสมการเราให้ $c_2 = \frac{1}{a}$

ดังนั้น เมื่อ $x = 0$ ได้ $y = \frac{1}{a}$ จึงจำเป็นที่

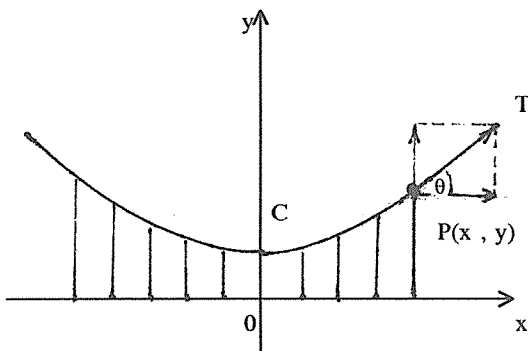
$$\frac{1}{a} = \frac{1+1}{2a} + c_2 \text{ และ } c_2 = 0$$

$$\therefore y(x) = \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2a} = \frac{1}{a} \cosh ax$$

เราจะได้รูปสมการที่เรียกว่าสมการโซ่ (catenary) จงสังเกตรูปร่างโซ่ที่ได้ในกรณีนี้ ไม่ใช่พาราโบลา

ตัวอย่าง 3.3.5 เปลี่ยนโจทย์จากตัวอย่าง 4 เป็นสายเคเบิลที่รับน้ำหนักสะพานขนาดสม่ำเสมอ(ให้น้ำหนักสายเคเบิลน้อยมากเมื่อเทียบกับน้ำหนักสะพานจนละทิ้งได้) จงหารูปร่างสายเคเบิล

วิธีทำ



ให้น้ำหนักสะพาน w ต่อหน่วยความยาว

$$\text{คราวนี้เราได้ } T \cos \theta = T_0 \dots\dots\dots (a)$$

$$T \sin \theta = wx \dots\dots\dots (b)$$

$$\frac{(b)}{(a)} \text{ เราได้ } \tan \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{w}{T_0} x$$

$$\text{ดังนั้น } y = \frac{w}{2T_0} x^2 + c$$

เราจะได้ตามรูปว่า c คือระยะ OC ซึ่งเป็นความยาวเสาโยงต่ำสุด ดังนั้น รูปสายเคเบิลจะเป็นพาราโบลา

แบบฝึกหัด 3.3.3

1. สายเคเบิล ซึ่งไม่คิณน้ำหนัก รับน้ำหนักในแนวระดับ ซึ่งมีความหนาแน่นต่อหน่วยความยาวเท่ากับ $(24 + 2x^2)/\sqrt{24+x^2}$ ที่ $x = 1$ ปรากฏว่าความชันของสายเคเบิลเป็น $\frac{5}{12}$ จงหารูปร่างของสายเคเบิล
2. โซ่ขนาดสม่ำเสมอเส้นหนึ่งห้อยตัวจากปลายเสา ซึ่งห่างกัน 2 ฟุต ตามธรรมชาติของมัน ถ้าที่ปลายเสาต้นหนึ่งโซ่มีความชัน $\frac{4}{3}$ จงหารูปร่างของโซ่

คำตอบแบบฝึกหัด 3.3.3

$$1. y = \frac{1}{36} \{ [24+x^2] \}^{3/2} - [24]^{3/2} \quad 2. y = \frac{1}{\ln 9} \{ 3^{x/2} - 3^{-x/2} \}^2$$

3.4 การประยุกต์ทางวงจรไฟฟ้า

วงจรไฟฟ้าอย่างง่าย (simple electric circuits)

วงจรไฟฟ้าอย่างง่าย ประกอบด้วยสิ่งต่อไปนี้คือเป็นวงจรแบบอนุกรม

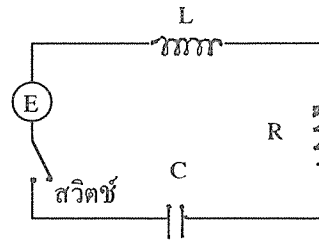
(a) แบตเตอรี่ หรือ เจนเนอเรเตอร์ ผลิตแรงเคลื่อน

ไฟฟ้า E โวลต์

(b) ตัวต้านทาน มีความต้านทาน R โอห์ม

(c) ขดลวดเหนี่ยวนำ มีค่าเหนี่ยวนำไฟฟ้า L เฮนรี

(d) คอนเดนเซอร์ (condenser หรือ capacitor) มีความจุ C ฟารัด



เมื่อเราต่อวงจรเข้ากับจุด 2 จุด ซึ่งมีความต่างศักย์กัน จะมีประจุไฟฟ้าไหลถ่ายเทจากที่ศักย์สูงไปสู่ที่ศักย์ต่ำ สมมติปริมาณประจุเท่ากับ Q คูลอมบ์ เราให้อัตราการเปลี่ยนแปลงประจุคือ

$$I = \frac{dQ}{dt} \text{ เป็นกระแสไฟฟ้า มีหน่วยแอมแปร์}$$

หลักพื้นฐานของวงจรไฟฟ้า

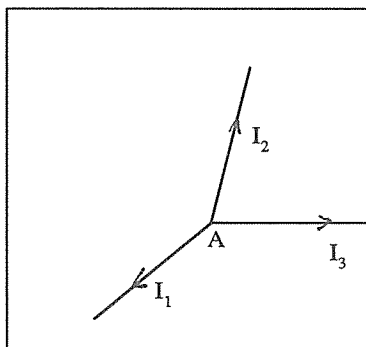
(1) ศักดไฟฟ้า เมื่อผ่านตัวต้านทาน R ศักย์จะลดลง IR

เมื่อผ่านขดลวดเหนี่ยวนำ L ศักย์จะลดลง $L \frac{dI}{dt}$

เมื่อผ่านคอนเดนเซอร์ C ศักย์จะลดลง $\frac{Q}{C}$

(2) กฎเคอร์ชอฟ (Kirchhoff's laws)

(ก) ผลรวมทางพีชคณิตของกระแสไหลเข้าออก จุดแยก (junction) ใด ๆ จะเป็น 0 (ให้กระแสไหลเข้าเป็นบวก ไหลออกเป็นลบ)

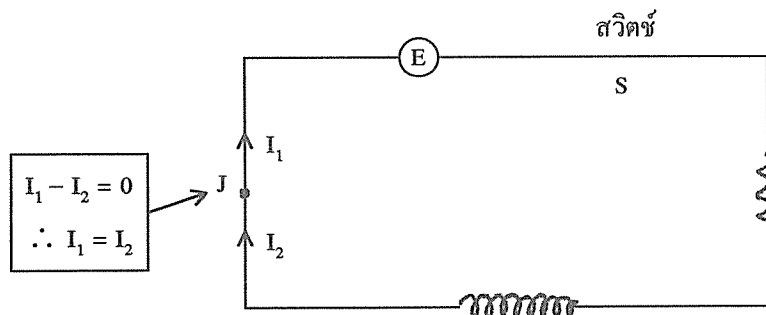


ตามรูป ที่จุดแยก A ให้ I_1 เป็นกระแสไหลเข้า

I_2, I_3 เป็นกระแสไหลออก

$$\text{จะได้ } I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

(ข) ผลรวมพีชคณิตของความต่างศักย์รอบรูปบ่วงปิด* (closed loop) เป็น 0
ข้อสังเกต สำหรับบ่วงปิดเดียว จะได้จาก (ก) ว่ากระแสเท่ากันตลอดทั้งวงจร



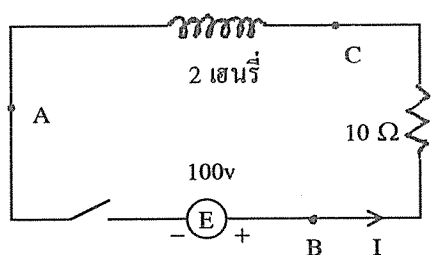
ปัญหาวงจรไฟฟ้าอย่างง่าย

สมมติฐานในหัวข้อนี้ คือ ค่า R , C และ L มีค่าคงที่ตลอดเวลา และ $E = E(t)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ของ t

ตัวอย่าง 3.4.1 วงจรที่มีขดลวดเหนี่ยวนำและตัวต้านทานหรือวงจร RL (RL -circuit)

ต้นกำเนิดไฟฟ้ามีแรงเคลื่อนไฟฟ้า 100 โวลต์ ต่อเป็นอนุกรมกับความต้านทาน 10 โอห์ม และขดลวดเหนี่ยวนำ 2 เฮนรี ให้ $t = 0$ เป็นเวลาที่กดสวิตช์เพื่อปิดวงจร จงเขียนสมการเชิงอนุพันธ์ สำหรับกระแสไฟฟ้า และหากระแสไฟฟ้าในวินาทีที่ t ใด ๆ

วิธีทำ



เมื่อกดสวิตช์ปิดวงจร กำหนดจุดที่มี

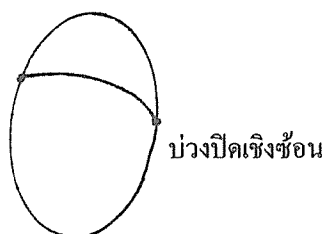
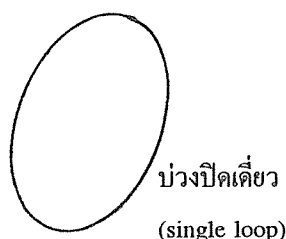
ความต่างศักย์กันในวงจรดังรูปคือ จุด A, B และ C วงจรนี้เป็นรูปบ่วงเดียว กระแสต้องเท่ากันตลอดวงจรตามกฎของเคอร์ชอฟ (ข) จะได้ผลรวมของความต่างศักย์ดังแผนภาพทางซ้าย

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$$

$$100 - 10I - 2 \frac{dI}{dt} = 0$$

$$\text{ได้สมการ } \frac{dI}{dt} + 5I = 50 \quad \dots\dots\dots(a)$$

* ทางครบวงจรในข่ายวงจรเรียกว่า รูปบ่วงปิด



เป็นสมการเชิงเส้นที่มี I.F. e^{5t} คำตอบคือ

$$\begin{aligned} I e^{5t} &= \int 50e^{5t} dt \\ &= 10e^{5t} + C \end{aligned}$$

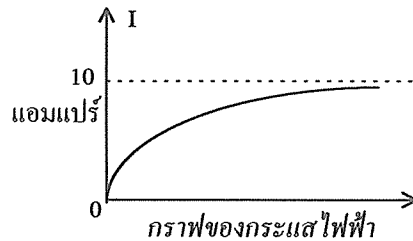
เมื่อ $t = 0$ ได้ $I = 0$ (เนื่องจากเรากดสวิตช์เมื่อ $t = 0$)

ดังนั้น $0 = 10 + C$ และ $C = -10$

$$I e^{5t} = 10e^{5t} - 10$$

เราได้สูตร $I(t) = 10(1 - e^{-5t})$ (b)

เป็นสูตรกระแสไฟฟ้า ณ เวลา t ใด ๆ



คำตอบคือ (a) และ (b)

ตัวอย่าง 3.4.2 (กระแสสลับ) ถ้าในตัวอย่าง 3.4.1 เปลี่ยนว่า ดันกำเนิดไฟฟ้ามีแรงเคลื่อน

$$E(t) = 20 \cos 5t \text{ โวลต์}$$

จงหากระแส $I(t)$ ณ เวลา t

วิธีทำ ในตัวอย่าง 3.4.1 เรามีสมการ

$$100 - 10I - 2 \frac{dI}{dt} = 0$$

เปลี่ยน 100 เป็น $20 \cos 5t$ ได้

$$20 \cos 5t - 10I - 2 \frac{dI}{dt} = 0$$

$$\frac{dI}{dt} + 5I = 10 \cos 5t$$

ตัวประกอบเพื่ออินทิเกรต คือ e^{5t}

$$\begin{aligned} I e^{5t} &= \int 10e^{5t} \cos 5t dt \\ &= 2 \int e^{5t} \cos 5t d(5t) \\ &= e^{5t} (\cos 5t + \sin 5t) + c \end{aligned}$$

$$I(t) = \cos 5t + \sin 5t + c e^{-5t}$$

เมื่อ $t = 0$ ได้ $I = 0$ ดังนั้น

$$0 = 1 + 0 + c \text{ และ } c = -1$$

ดังนั้น $I(t) = \cos 5t + \sin 5t - e^{-5t}$

ตัวอย่าง 3.4.3 วงจรที่มีคอนเดนเซอร์ และตัวต้านทานหรือวงจร RC (RC-circuit)

ต้นกำเนิดไฟฟ้ามีแรงเคลื่อนไฟฟ้า $200e^{-5t}$ ต่อเป็นวงจรอนุกรมกับความต้านทาน 20 โอห์ม และคอนเดนเซอร์ 0.01 ฟารัด สมมติว่า เดิมไม่มีประจุที่คอนเดนเซอร์ (นั่นคือ เมื่อ $t = 0$ ได้ $Q = 0$)

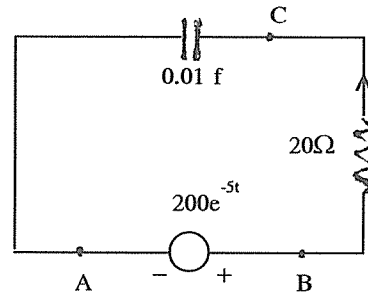
ก. จงหาสูตรประจุและกระแสไฟฟ้า

ข. จงแสดงว่าจะมีขณะหนึ่งที่มีประจุมากที่สุด และคำนวณค่าประจุไฟฟ้านั้น

วิธีทำ

สร้างสมการตามแผนภาพข้างล่าง

$$\begin{aligned} A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A \\ 200e^{-5t} - 20I - \frac{Q}{0.01} &= 0 \\ \text{หรือ } 200e^{-5t} - 20 \frac{dQ}{dt} - 100Q &= 0 \\ \frac{dQ}{dt} + 5Q &= 10e^{-5t} \end{aligned}$$



เป็นสมการเชิงเส้น มีตัวประกอบเพื่ออินทิเกรต e^{-5t}

คำตอบคือ

$$\begin{aligned} Q e^{5t} &= \int 10e^{-5t} e^{5t} dt \\ &= 10 + c \end{aligned}$$

เมื่อ $t = 0$ ได้ $Q = 0$

ดังนั้น $0 = 10 + c$ และ $c = -10$ แทนค่า c ในสมการข้างต้น

ได้สมการ $Q(t) = 10te^{-5t}$ (1)

หาอนุพันธ์ของ (1) ได้

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= I = 10(e^{-5t} - 5te^{-5t}) \\ I(t) &= 10(1 - 5t)e^{-5t} \end{aligned} \quad \text{..... (2)}$$

คำตอบ ก. คือสมการ (1) และ (2)

เนื่องจาก $I = \frac{dQ}{dt}$ ดังนั้น ประจุจะมากที่สุดเมื่อ $I = 0$ นั่นคือ เป็นเวลาที่ $t = \frac{1}{5}$ (ดูสมการ (2))

ดังนั้น จะมีประจุสูงสุดที่คอนเดนเซอร์ เมื่อ $t = \frac{1}{5}$ วินาที (3)

อนึ่งค่าประจุสูงสุดคือ

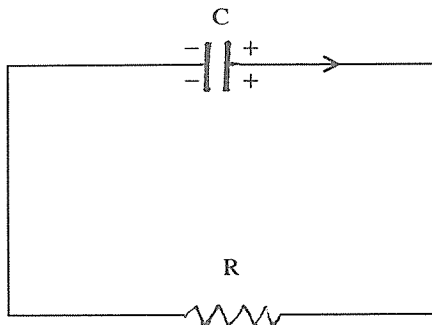
$$\begin{aligned} Q\left(\frac{1}{5}\right) &= 10\left(\frac{1}{5}\right)e^{-5\left(\frac{1}{5}\right)} \\ &= \frac{2}{e} \\ &\approx 0.74 \text{ คูลอมบ์} \end{aligned} \quad \text{..... (4)}$$

คำตอบ ข. คือสมการ (3) และ (4)

มีปัญหว่าในวงจร RC จำเป็นหรือไม่ที่ขณะกดสวิตช์ กระแสต้องเป็น 0 หรือจะต้องเป็น 0 คำตอบคือไม่จำเป็น เช่น กรณีที่วงจรมีคอนเดนเซอร์ และมีประจุไฟฟ้าอยู่ที่คอนเดนเซอร์อยู่ก่อนแล้ว ในกรณีนี้ กระแสต้น $I(0)$ ไม่จำเป็นต้องเป็น 0

แบบฝึกหัด 3.4

- จงแก้สมการ $L \frac{dI}{dt} + RI = E$; I เป็นฟังก์ชันของ t , L, R, E เป็นตัวคงค่า และถ้า $t = 0$ จะได้ $I = 0$
- จากโจทย์ข้อ 1 จงหา I เมื่อ $t = 0.1$ วินาที ถ้า $L = 2$ เฮนรี, $R = 20$ โอห์ม และ
 - $E = 10$ โวลต์
 - $E = 100$ โวลต์
- จากโจทย์ข้อ 1 จงหา L ถ้า $R = 20$ โอห์ม และ $I = 1$ แอมแปร์ เมื่อ $t = 0.01$ วินาที และ
 - $E = 40$ โวลต์
 - $E = 200$ โวลต์
- จากโจทย์ข้อ 1 จงหา E ถ้า $L = 5$ เฮนรี, $R = 15$ โอห์ม และ $I = 1.5$ แอมแปร์ เมื่อ $t = 1$ วินาที
-



จากวงจร จงแสดงการจ่ายประจุของ
คอนเดนเซอร์ โดยการแก้สมการ
 $R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$ และตามเงื่อนไขต้น
 $Q = Q_0$ เมื่อ $t = 0$ จากนั้นหา Q
เมื่อ $t = CR, t = 2CR$ และ
 $\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t)$ และจงหา t เมื่อ $Q = 0.01Q_0$

- จงแสดงการลดลงของกระแสไฟฟ้า ในวงจรไฟฟ้าอย่างง่าย ซึ่งไม่มีแรงเคลื่อนและไม่มี
คอนเดนเซอร์ โดยมีกระแสดันเป็น I_0 และจงหาค่ากระแสไฟฟ้า เมื่อเวลา $t = \frac{R}{L}, t = \frac{2R}{L}$
- จงแสดงการเพิ่มของกระแสไฟฟ้า ในวงจรไฟฟ้าอย่างง่าย ซึ่งมีเฉพาะความต้านทาน R ขดลวด
เหนี่ยวนำ L และแรงเคลื่อนต่อไปนี้
 - E
 - $E \sin \omega t$
 โดยสมมติว่า กระแสเมื่อเริ่มต้นเป็น 0
- ถ้า I_0 เป็นกระแสตกที่ในวงจรซึ่งมีความต้านทาน R และขดลวดเหนี่ยวนำ L เฮนรีต่อแบบ
อนุกรม จงแสดงว่าเมื่อเกิดวงจรลัดจะได้กระแสลดลงตามสูตร

$$I = I_0 e^{-Rt/L}$$

9. จงแก้สมการ $L \frac{dI}{dt} + RI = E \cos pt$ เมื่อ L, R, E และ p เป็นตัวคงค่าบวก จงแสดงว่าเมื่อ t ใหญ่มากพอจะได้ I ไกล่จะมีคาบ ซึ่งขนาดคาบเป็น $\frac{2\pi}{p}$

10. วงจรกระแสสลับมีแรงเคลื่อนไฟฟ้า $E_0 \sin \omega t$ ทำกับวงจรอนุกรม ซึ่งประกอบด้วยตัวต้านทาน R และขดลวดเหนี่ยวนำ L เมื่อเวลา $t = \tau$ สมมติว่าเดิมไม่มีกระแสอยู่ จงเขียนกระแสในรูปฟังก์ชันของเวลา และจงแสดงว่า ถ้า

$$\omega \tau = n\pi + \arctan(\omega L/R)$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม จะไม่มีเวลาที่ไฟดับปกติ (ช่วงเวลา t ที่กราฟกระแสมีรูปผิติดจากช่วงอื่น ๆ)

คำตอบแบบฝึกหัด 3.4

1. $I = \frac{E}{R}(1 - e^{-Rt/L})$

2. ก. 0.316 โวลต์ ข. 3.16 โวลต์

3. ก. 0.282 เฮนรี ข. 1.90 เฮนรี

4. 24.5 โวลต์

5. $Q_{t=CR} = 0.368 Q_0$, $Q_{t=2CR} = 0.135 Q_0$

$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = 0$, $t_Q = 0.01Q_0 = 4.61 RC$

6. $0.368 I_0$, $0.135 I_0$ 7. ก. $I = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{Rt}{L}})$

ข. $I = \frac{E}{R^2 + L^2 \omega^2} (R \sin \omega t - \omega t \cos \omega t + \omega L e^{-\frac{Rt}{L}})$

9. $I = \frac{E}{R^2 + P^2 L^2} (R \sin pt - pL \cos pt + pL e^{-\frac{Rt}{L}})$

10. $I = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \left[\sin \omega t - e^{-R(t-\tau)/L} \sin(\omega t - \phi) \right]$, $\phi = \arctan \frac{\omega L}{R}$

3.5 การสลายตัวของธาตุกัมมันตภาพรังสี

ธาตุกัมมันตภาพรังสี มีคุณสมบัติที่ตรงกันอย่างหนึ่งคือ จะสลายตัวตลอดเวลาและมีอัตราการสลายตัวเป็นสัดส่วนกับปริมาณสารกัมมันตภาพที่เหลืออยู่ (กัมมันตะ = ทำการงาน)

เรียกคุณสมบัตินี้ว่า กฎการสลายตัว ให้ $y = y(t)$ เป็นปริมาณสารกัมมันตภาพรังสี ณ เวลา t

กฎของการสลายตัว (Law of Decay) ที่กล่าวข้างต้นเขียนได้เป็น

$$\frac{dy}{dt} = -ky$$

โดย $k > 0$ เรียกว่าตัวคงค่าของการสลายตัว (constant of decay)

การหาสูตรปริมาณสาร $y(t)$

ให้ $y_0 = y(0)$ เป็นปริมาณสาร ณ เวลา $t = 0$

จากกฎของการสลายตัว $\frac{dy}{dt} = -ky$

เราได้ $\frac{dy}{y} = -kdt$

$$y = ce^{-kt}$$

เมื่อ $t = 0$ ได้ $y = y_0$ ดังนั้น $y_0 = c \cdot e^0$ และ $c = y_0$

แทนค่า c ได้สูตร $y(t) = y_0 e^{-kt}$ (1)

ครึ่งชีวิต (Half life)

จะเห็นว่า $y(t) > 0$ เมื่อ t มีค่าจำกัด นั่นคือ สารกัมมันตภาพรังสีไม่มีวันสลายตัวหมด จึงไม่ได้ประโยชน์อะไรจากการกล่าวถึงช่วงชีวิต (total lifetime) ของสารกัมมันตภาพรังสี เราจึงนิยมใช้เวลา T ซึ่ง

$$\frac{y(T)}{y(0)} = \frac{1}{2}$$

เรียก T ว่า ครึ่งชีวิต (half life) ของสารกัมมันตภาพรังสี ซึ่งหมายถึงเวลานับตั้งแต่ $t = 0$ จนถึงเวลาที่สลายตัวไปได้ครึ่งหนึ่ง

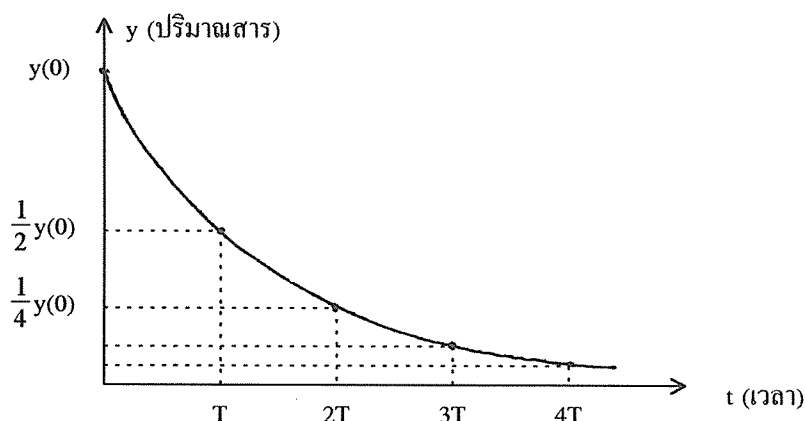
จาก $\frac{y(T)}{y(0)} = \frac{1}{2}$

เราได้จาก (1) $\frac{y_0 e^{-kT}}{y_0} = \frac{1}{2}$

หรือ $e^{-kT} = \frac{1}{2}$

พิจารณา $\frac{y(t+T)}{y(t)} = \frac{y_0 e^{-k(t+T)}}{y_0 e^{-kt}}$
 $= e^{-kT}$
 $= \frac{1}{2}$

ดังนั้น ในกราฟแสดงปริมาณสาร y ความสูง $y(t+T)$ เป็นครึ่งหนึ่งของความสูง $y(t)$
 ดังรูป



ครึ่งชีวิตของธาตุกัมมันตภาพรังสี เป็นสิ่งที่นักวิทยาศาสตร์หาข้อเท็จจริงบางประการตามความสนใจ โดยไม่ต้องทราบตัวคงค่าของการสลายตัวของสารกัมมันตภาพรังสี ตัวอย่าง เช่น

ตัวอย่าง 3.5.1 ครึ่งชีวิตของเรเดียมเป็น 1600 ปี โดยประมาณ จงหาว่าในเวลา 100 ปี จะเหลือเรเดียมเป็นอัตราส่วนเท่าใด และเรเดียมสลายตัวไปที่เปอร์เซ็นต์

วิธีทำ ให้ $y(t)$ เป็นปริมาณสารเรเดียม ณ เวลา t

เราต้องหา (1) $\frac{y(100)}{y(0)}$ และ (2) $(1 - \frac{y(100)}{y(0)})100$

จาก $y(t) = y_0 e^{-kt}$

$$\begin{aligned} \text{เราได้ } \frac{y(100)}{y(0)} &= \frac{y_0 e^{-100k}}{y_0} \\ &= (e^{-1600k})^{\frac{1}{16}} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{16}} \dots\dots\dots \text{คำตอบ (1)} \end{aligned}$$

$$\text{เรเดียมสลายตัวไป } 100(1 - (\frac{1}{2})^{\frac{1}{16}}) = 4.2 \text{ เปอร์เซนต์ } \dots\dots\dots \text{คำตอบ (2)}$$

ความรู้เรื่องการสลายตัวของธาตุกัมมันตภาพรังสี ใช้ในการหาอายุของสิ่งเก่าแก่บางอย่าง เช่นภาพเขียนเก่าแก่ อายุหินแกรนิตในวิชาธรณีวิทยา และอายุซากพืชและสัตว์โบราณได้พอสมควร เหตุผลและหลักการหาอายุซากพืชซากสัตว์โบราณมีดังนี้

สารกัมมันตภาพรังสี คาร์บอน 14 เกิดขึ้นในชั้นบรรยากาศสูง ๆ โดยการที่นิวตรอนของรังสีคอสมิก ชนก๊าซไนโตรเจน สารนี้จะรวมกับออกซิเจนเป็นคาร์บอนไดออกไซด์ และผสมกลมกลืนตามแรงลมกับก๊าซคาร์บอนไดออกไซด์เดิมที่มีได้มีสารกัมมันตภาพรังสีแฝงอยู่ เนื่องจากการเกิดคาร์บอน 14 ดังกล่าวและการสลายตัวของมันเป็นก๊าซไนโตรเจนตามเดิมในชั้นบรรยากาศเป็นไปตามสมมติฐานที่ว่าสัดส่วนของคาร์บอน 14 นี้ในก๊าซคาร์บอนไดออกไซด์คงที่ทุกยุคสมัย

สำหรับพืชหายใจนำคาร์บอน 14 แฝงไว้ในเนื้อเยื่อ ส่วนสัตว์กินพืชหรือกินสัตว์ด้วยกัน มีสารคาร์บอน 14 แฝงในตัวด้วย จึงสรุปได้ว่าสัดส่วนของสารคาร์บอน 14 ในพืชและสัตว์ที่มีชีวิตอยู่จะคงที่ แต่เมื่อมันตายลง มันจะไม่รับคาร์บอน 14 อีก สารคาร์บอน 14 ในซากของมันจะสลายตัว สัดส่วนคาร์บอน 14 ที่เหลืออยู่ในซากเหล่านั้นจะบอกอายุซากได้ เช่น ถ้าชิ้นไม้เก่าแก่ชิ้นหนึ่งมีคาร์บอน 14 เป็นครึ่งหนึ่งของพืชสดปัจจุบัน อายุไม้เก่าแก่นั้นจะเป็น 5600 ปีโดยประมาณ ถ้าเหลือเป็นอัตราส่วน $\frac{1}{4}$ จะมีอายุถึง 11,200 ปี หลักการนี้ใช้หาอายุของอินทรีย์สารสมัยโบราณ เช่น ไม้ ถ่าน เส้นใยของผัก, เยื่อ, หนัง, กระดูก และเขา

แบบฝึกหัด 3.5

1. ณ ขณะหนึ่ง สารกัมมันตภาพรังสีชนิดหนึ่งมีความบริสุทธิ์อยู่ 90 ปอนด์ 1 ชั่วโมงต่อมาเหลือความบริสุทธิ์อยู่ 75 เปอร์เซนต์ จงหาครึ่งชีวิตของสารนั้น
2. สารกัมมันตภาพรังสีชนิดหนึ่ง ครึ่งชีวิตของมันเท่ากับ 50,000 ปี ปัจจุบันเหลืออยู่ 10 เปอร์เซนต์ จงหาว่าสารนี้เริ่มต้นมีสารกัมมันตภาพรังสีบริสุทธิ์เต็มที่กี่ปีมาแล้ว
3. ยูเรเนียมสลายตัวเป็นสัดส่วนกับปริมาณที่เหลืออยู่ ถ้า M_1, M_2 กรัม เป็นปริมาณที่เหลืออยู่ ณ เวลา T_1 และ T_2 ตามลำดับ จงแสดงว่าครึ่งชีวิตเท่ากับ

$$\frac{(T_2 - T_1) \ln 2}{\ln \left(\frac{M_1}{M_2} \right)}$$

4. อัตราส่วนของ C^{14} ซึ่งเป็นสารกัมมันตภาพรังสี ต่อ C^{12} ที่มีอยู่ในพืชและสัตว์ที่มีชีวิต จะมีค่าคงที่ จากการวิเคราะห์ซากไดโนเสาร์ตัวหนึ่ง ปรากฏว่าเหลือปริมาณ C^{14} เป็น 6.24 เปอร์เซนต์ของปริมาณ C^{14} ในสิ่งที่มีชีวิต สมมติว่าครึ่งชีวิตของ C^{14} เป็น 5600 ปี โดยประมาณ จงหาว่าไดโนเสาร์ตัวนี้เคยมีชีวิตอยู่เมื่อกี่ปีมาแล้ว
5. เมื่อแสงผ่านกระจกหน้าต่างจะมีแสงบางส่วนถูกดูดกลืนโดยการทดลองได้ ปรากฏว่าเปอร์เซนต์ของแสงที่ถูกดูดกลืนโดยกระจกที่มีความหนาน้อยจะเป็นสัดส่วนกับความหนาของกระจก (แปรผันตรงกับความหนา) จงแสดงว่า ถ้ากระจกมีความหนา w จะได้แสงถูกดูดกลืน $r\%$ แล้วเปอร์เซนต์ของแสงที่ถูกดูดกลืนโดยกระจกหนา nw จะเป็น

$$100 \left[1 - \left(1 - \frac{r}{100} \right)^n \right], \quad 0 \leq r \leq 100$$

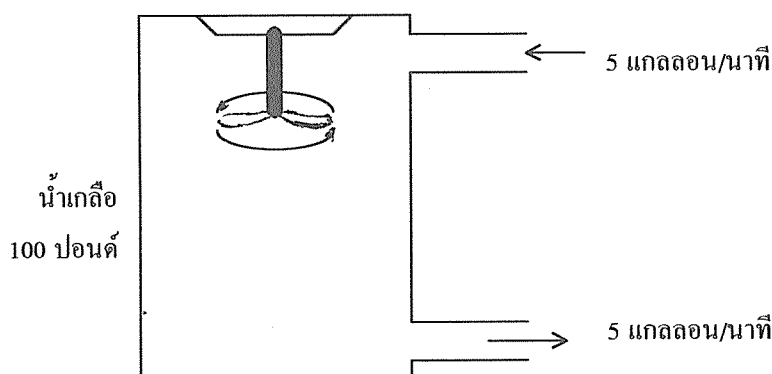
คำตอบแบบฝึกหัด 3.5

1. ประมาณ 3 ชั่วโมง 48 นาที
2. ประมาณ 166,000 ปีมาแล้ว
4. 22,400 ปี

3.6 การประยุกต์ในทางเคมี

ตัวอย่าง 3.6.1 ปัญหาสารละลาย (dilution problem)

ถังน้ำบรรจุน้ำเกลือได้ 100 แกลลอน น้ำเกลือมีความเข้มข้น ดังนี้ มีเกลือ 2.5 ปอนด์ต่อแกลลอน มีท่อซึ่งปล่อยน้ำเกลือความเข้มข้นเกลือ 2 ปอนด์ต่อแกลลอนไหลเข้าถังในอัตรา 5 แกลลอนต่อนาที ในถังมีเครื่องตีน้ำเกลือให้เข้ากัน น้ำเกลือที่ผสมแล้วออกไปในอัตราเดียวกับน้ำเกลือที่เข้า จงหาปริมาณเกลือในถังในเวลา t ใด ๆ



วิธีทำ ให้ $y(t)$ เป็นจำนวนปอนด์ของเกลือในถัง ณ เวลา t

ค่า y จะเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา เหตุที่ทำให้ y เปลี่ยน มีสองประการ คือ

(ก) เกลือเข้านาทีละ $(5)(2) = 10$ ปอนด์

(ข) เกลือออกนาทีละ $\frac{5y}{100} = \frac{y}{20}$ ปอนด์

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาณเกลือในถัง

$$\frac{dy}{dt} = 10 - \frac{1}{20}y$$

สมการนี้จัดเป็นรูปสมการเชิงเส้นได้ $y' + \frac{1}{20}y = 10$ มี I.F. $e^{\frac{t}{20}}$

$$\text{คำตอบคือ } y e^{\frac{t}{20}} = \int 10 e^{\frac{t}{20}} dt$$

$$= 200 e^{\frac{t}{20}} + c$$

เมื่อ $t = 0$ ได้เกลือ $(2.5)(100) = 250$ ปอนด์ แทนค่าได้

$$(250)(1) = 200 + c \quad \text{ได้ } c = 50$$

$$\therefore y e^{\frac{t}{20}} = 200 e^{\frac{t}{20}} + 50$$

$$y = 200 + 50 e^{-\frac{t}{20}}$$

หมายเหตุ จงสังเกตว่า จากตัวอย่าง 3.6.1 ค่า $y > 200$ เสมอ และ $y \rightarrow 200$ เมื่อ $t \rightarrow \infty$

ตัวอย่าง 3.6.2 ปฏิกริยาทางเคมีของสารสถานะเดียวกัน แบบปฏิกริยาโมเลกุลคู่ และ
 ปริมาตรคงที่ สาร 2 ชนิด A และ B ซึ่งอยู่ในสถานะเดียวกันทำปฏิกริยาได้สาร
 C ในกรณีที่สารการเกิดโมเลกุลของสาร C เป็นปฏิกิริยาโดยตรงกับความน่าจะเป็น
 เป็นที่โมเลกุลของสาร A จะพบสาร B โดยเงื่อนไขปริมาตรคงที่ ค่าความน่าจะเป็น
 เป็นนี้เป็นสัดส่วนโดยตรงกับความเข้มข้นของ A และ B ในขณะนั้น อนึ่ง ถ้า
 ปฏิกริยานี้เป็นแบบปฏิกริยาโมเลกุลคู่ จงสร้างสูตรการเกิดสาร C ในเวลา t ใด ๆ

วิธีทำ ให้ $N(t)$ เป็นจำนวนโมเลกุลของสาร C ณ เวลา t

a เป็นจำนวนโมเลกุลเดิมของสาร A

b เป็นจำนวนโมเลกุลเดิมของสาร B

ปฏิกริยาโมเลกุลคู่ มีลักษณะว่าสาร A 1 โมเลกุลกับสาร B 1 โมเลกุลทำ
 ปฏิกริยากันได้สาร C 1 โมเลกุล

ดังนั้น จำนวนโมเลกุลของสาร A ณ เวลา t คือ $a-N$

จำนวนโมเลกุลของสาร B ณ เวลา t คือ $b-N$

จะได้ $\frac{dN}{dt} = k(a-N)(b-N)$

โดย k เป็นค่าคงที่บวกเรียกว่า อัตราการเกิดปฏิกริยา

แก้สมการเชิงอนุพันธ์นี้แบบแยกตัวแปร

$$\begin{aligned}\frac{dN}{(a-N)(b-N)} &= k dt \\ \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{b-N} - \frac{1}{a-N} \right) dN &= k dt \\ \frac{1}{a-b} \ln \frac{a-N}{b-N} &= kt + c\end{aligned}$$

สมมติ เราเริ่มจับเวลา เมื่อแรกทำปฏิกริยาทางเคมี จะได้ $N=0$ เมื่อ $t=0$ ดังนั้น

$$\frac{1}{a-b} \ln \frac{a}{b} = 0 + c$$

แทนค่า c ในคำตอบทั่วไปข้างต้นนี้ได้

$$\begin{aligned}\frac{1}{a-b} \ln \frac{b(a-N)}{a(b-N)} &= kt \\ \frac{b}{a} \left(\frac{a-N}{b-N} \right) &= e^{(a-b)kt} \\ \frac{b}{a} e^{-(a-b)kt} &= \frac{b-N}{a-N} \\ be^{-(a-b)kt} - N \frac{b}{a} e^{-(a-b)kt} &= b-N \\ N(1 - \frac{b}{a} e^{-(a-b)kt}) &= b(1 - e^{-(a-b)kt}) \\ N(t) &= \frac{ab(1 - e^{-(a-b)kt})}{a - be^{-(a-b)kt}}\end{aligned}$$

จงสังเกตว่า ถ้า $a > b$ จะได้ $N \rightarrow b$ เมื่อ $t \rightarrow \infty$

ตามปกติ ปฏิกิริยาทางเคมีมักจะซับซ้อน และใช้คณิตศาสตร์อธิบายยุ่งยากเช่นกัน ในหนังสือเล่มนี้ ทั้งตัวอย่างและแบบฝึกหัด เราจะกล่าวถึงเฉพาะกรณีที่ง่ายได้แก่ กรณีปฏิกิริยาเอกพันธ์แบบง่าย (simple homogeneous reaction) ซึ่งใช้สารในสถานะเดียวกันเช่นของเหลวเหมือนกัน หรือใช้ก๊าซเหมือนกันทำปฏิกิริยากัน ตัวอย่างปฏิกิริยาได้แก่ แบบปฏิกิริยาโมเลกุลเดี่ยว แบบปฏิกิริยาโมเลกุลคู่ ฯลฯ

สำหรับแบบปฏิกิริยาโมเลกุลเดี่ยว (unimolecular reaction) อัตราการเปลี่ยนสาร A เป็น สัดส่วนกับโมเลกุลของสาร A ที่มีในขณะนั้น จะได้สมการ

$$\frac{dN}{dt} = -kN$$

โดย N เป็นจำนวนโมเลกุลของสาร A , k เป็นค่าคงที่บวกเรียกอัตราการเกิดปฏิกิริยา

สำหรับแบบปฏิกิริยาโมเลกุลคู่ (bimolecular reaction) ใช้สารสองชนิด A และ B โดยสาร A 1 โมเลกุลทำปฏิกิริยากับสาร B 1 โมเลกุลแล้วได้สาร C 1 โมเลกุล

แบบฝึกหัด 3.6

1. ถังใบหนึ่งจุน้ำบริสุทธิ์ 60 แกลลอน มีน้ำเกลือซึ่งความเข้มข้นคือเกลือ 3 ปอนด์ต่อ 1 แกลลอน ไหลเข้าในอัตรา 2 แกลลอนต่อนาที และน้ำเกลือที่ผสมแล้วไหลออกในอัตรา 25 แกลลอนต่อนาที

(ก) จงหาความเข้มข้นของเกลือในถัง ณ เวลา t ใด ๆ

(ข) จงหาความเข้มข้นของเกลือ เมื่อในถังมีน้ำเกลือ 30 แกลลอน

(ค) จงหาปริมาณเกลือที่มากที่สุดได้ถึง

2. สารเคมี C ละลายในน้ำ อัตราที่สาร C ละลายเข้าปนในสารละลายเป็นสัดส่วนตรงกับผลคูณของ

(1) ปริมาณสาร C ที่ยังไม่ละลาย

(2) ผลต่างของความเข้มข้นกับความเข้มข้นในสภาวะอิ่มตัว (สาร C ไม่ละลายอีก)

สมมติว่า สาร C ปริมาณ 5 ปอนด์ ใส่ลงไปในน้ำ 2 แกลลอน ทดลองได้ว่า หลังจากนั้น 1 ชั่วโมง สาร C ละลายได้ 1 ปอนด์ และขณะที่อยู่ในสภาวะอิ่มตัวมีสาร C เข้มข้น 4 ปอนด์ต่อแกลลอน

(ก) จงหาว่าหลังจาก 4 ชั่วโมงผ่านไป จะเหลือสาร C ค้างอยู่เท่าใด

(ข) เมื่อใด สารละลายจะมีความเข้มข้น 2 ปอนด์/แกลลอน

3. (การดูดกลืนยา ในอวัยวะหรือเซลล์)

อวัยวะหรือกลุ่มของเซลล์ที่ทำหน้าที่ในหน่วยเดียวกันเรียกว่า สภาคห้อง (compartment) เรื่อง การดูดกลืนยาหรือสารเคมีในสภาคห้องเป็นเรื่องสำคัญของสาขาเภสัชศาสตร์ อาจมียาอันตราย

ที่เข้มข้นเกินไปจะทำให้ลายอวยะ

สมมติ อวยะส่วนหนึ่งมีปริมาตร 500 ลบ.ซม. มีน้ำยาซึมเข้าอัตรา 10 ลบ.ซม./วินาที และถ่ายออกในอัตราเดียวกัน น้ำยาที่มีความเข้มข้น 0.08 กรัมต่อ ลบ.ซม. สมมติว่าเดิมไม่มีตัวยาในอวยะนั้นเลย จงหา

- (ก) ความเข้มข้นของยาในอวยะหลังจาก 30 นาที และ 120 นาที
- (ข) ความเข้มข้นของตัวยาที่คงที่
- (ค) เมื่อใดความเข้มข้นของยาในอวยะเป็น 0.04 กรัม/ลบ.ซม.

4. สมมติในการทำปฏิกิริยาทางเคมีให้ x เป็นปริมาณสาร ณ เวลา t ซึ่งความเร็วของปฏิกิริยาคือ

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(2a-x)$$

เมื่อ a, k เป็นตัวคงค่าสมมติ $x = 0$ เมื่อ $t = 0$, $x = 2$ เมื่อ $t = 1$ และ $x = 2.8$, $t = 3$

- (ก) จงแสดงว่า $a = 3$
- (ข) จงหาค่าของ k
- (ค) จงหา x เมื่อเวลา $t = 2$

5. ความเร็วของปฏิกิริยาระหว่างกรดโบรมิก (bromic) และไฮโดรโบรมิก ในสภาพแวดล้อมอย่างหนึ่ง แทนด้วยสมการ

$$\frac{dx}{dt} = k(na+x)(a-x)$$

- (ก) จงแสดงว่า $kt = \frac{1}{a(n+1)} \ln \frac{na+x}{a-x} + c$
- (ข) ถ้า $x = 0$ เมื่อ $t = 0$ จงหา c

6. สมการโกลด์ชมิทซ์ (Goldschmidt's equation) สำหรับความเร็วของปฏิกิริยาเคมีระหว่างกรดเกลือ และเอทิลแอลกอฮอล์เป็น

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)^2$$

จงแสดงว่า

$$kt = \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{b-x} - \frac{1}{a-b} \ln \frac{a-x}{b-x} \right) + c$$

ถ้า $x = 0$ เมื่อ $t = 0$ จงหาค่า c

7. กฎกิริยากระทำของมวลสาร กล่าวว่า ถ้าอุณหภูมิคงที่ ความเร็วของปฏิกิริยาเคมีจะเป็นสัดส่วนตรงกับความเข้มข้นของสารที่กำลังทำปฏิกิริยา

ถ้าให้ $[A]$, $[B]$, $[C]$, แทนความเข้มข้นของสาร $A, B, C, \dots$ ณ เวลา t มีหน่วยเป็นโมลต่อลิตร* และ x เป็นจำนวนโมลต่อลิตรที่ได้จากปฏิกิริยาจะได้

$$\frac{dx}{dt} = k[A]^a[B]^b[C]^c \dots\dots$$

* โมล (mole) คือน้ำหนักโมเลกุลของสารในหน่วยกรัม

k เป็นตัวคงค่าความเร็วปฏิกิริยา a ,b, c,... เป็นจำนวนโมเลกุลที่ใช้ในการทำปฏิกิริยา
ร่วมกันของสาร A,B,C,... ตามลำดับ

สมมติ เราผสม เอทิลอะซิเตต ($\text{CH}_3\text{COOC}_2\text{H}_5$) ปริมาณ 260 กรัมกับ NaOH
(โซเดียมไฮดรอกไซด์) ปริมาณ 175 กรัม ในน้ำได้ CH_3COONa (โซเดียมอะซิเตต) และ
 $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ (เอทิลแอลกอฮอล์) ตามสมการ



เมื่อครบ 10 นาที ปรากฏว่า เกิดโซเดียม อะซิเตต 60 กรัม และปฏิกิริยานี้เป็นไปตามกฎ
ปฏิกิริยาของมวลสาร จงหา

ก. ตัวคงค่าความเร็วปฏิกิริยา

ข. คำนวณกรัมของโซเดียม อะซิเตต และ เอทิลแอลกอฮอล์ เมื่อครบ $\frac{1}{2}$ ชั่วโมง

(ข้อแนะ : น้ำหนักอะตอม C = 12.01, H = 1.008, O = 16, Na = 22.997)

คำตอบแบบฝึกหัด 3.6

1. (ก) $3 \left[1 - \left(1 - \frac{t}{120} \right)^4 \right], 0 \leq t \leq 120$

(ข) 2.81 ปอนด์/แกลลอน

(ค) 96.3 ปอนด์

2. (ก) 2.33 ปอนด์

(ข) 1.12 ปอนด์/แกลลอน

(ค) 10.3 ชั่วโมง

3. (ก) $0.08(1 - e^{-\frac{1}{2}}), 0.08(1 - e^{-2})$

(ข) 0.08

(ค) $60 \ln 2$

4. (ก) $k = \frac{1}{3} \ln 2$, (ข) $x = 2.57$

5. (ข) $C = - \{a(n+1)\}^{-1} \ln n$

6. $C = \frac{b(3 + \ln \frac{a}{b}) - a}{b(a-b)^2}$

7. (ก) 1.44×10^{-2} ลิตรต่อโมลต่อวินาที

(ข) โซเดียมอะซิเตต 127 กรัม

เอทิลแอลกอฮอล์ 71 กรัม

แบบฝึกหัดระคน

1. (เศรษฐศาสตร์) ให้ $P(t)$ เป็นราคาสินค้าต่อหน่วย (เช่น ต่อกิโลกรัมหรือต่อบาร์เรล* เมื่อเวลา t จำนวนหน่วยของสินค้าที่ถูกความต้องการเรียกว่า อุปสงค์ (demand) แทนด้วย $D(t)$ ปรากฏว่า อุปสงค์ขึ้นอยู่กับ $P(t)$ และอัตราการเปลี่ยนของราคาสินค้า $P'(t)$ นั่นคือ

$$D = f(P(t), P'(t))$$

อนึ่ง จำนวนหน่วยของสินค้าที่ผลิตออกไปเรียก อุปทาน (supply) แทนด้วย $S(t)$ ปรากฏว่า อุปทานขึ้นอยู่กับ $P(t)$ และ $P'(t)$ เช่นกัน นั่นคือ

$$S = g(P(t), P'(t))$$

เมื่อใดก็ตามที่อุปสงค์และอุปทานไม่เท่ากัน $P(t)$ ย่อมเปลี่ยนไปจนกระทั่งสองค่านี้เท่ากัน

หลักเศรษฐศาสตร์ของอุปสงค์และอุปทาน กล่าวว่า ราคาสินค้า $P(t)$ ณ เวลา t นั่นคือ ย่อมหาได้จากเงื่อนไข

$$f(P(t), P'(t)) = g(P(t), P'(t))$$

สมมติว่า จำนวนพันหน่วยของอุปสงค์และอุปทาน เป็น

$$D = 48 - 2P(t) + 3P'(t)$$

และ

$$S = 30 + P(t) + 4P'(t)$$

- ก. จงสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ของ $P(t)$ ตามหลักเศรษฐศาสตร์ของอุปสงค์และอุปทาน
 - ข. ถ้า $t = 0$ ราคาสินค้าเป็น 10 จงหาสูตรราคาสินค้า
 - ค. จงเขียนกราฟของ $P(t)$ และ หา $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$
2. กฎการเย็นตัวของนิวตัน (Newton's law of cooling) กล่าวว่าอัตราการลดอุณหภูมิของวัตถุแปรผันโดยตรงกับผลต่างระหว่างอุณหภูมิวัตถุกับอุณหภูมิของภายนอกที่ล้อมรอบอยู่
- ก. จงเขียนสมการเชิงอนุพันธ์ของอุณหภูมิวัตถุตามกฎการเย็นตัวของนิวตัน
 - ข. ถ้าวัตถุเย็นตัวลงจาก 110°C เป็น 60°C ในเวลา 1 ชั่วโมง และอุณหภูมิภายนอกเป็น 10°C จงหาว่ากินเวลานานเท่าใดวัตถุจะเย็นตัวเป็น 30°C
 - ค. อธิการบดีกับรองอธิการบดี สั่งกาแฟคนละถ้วย ได้พร้อมกันและร้อนเท่า ๆ กัน อธิการบดีดื่มหมดไปทันที แต่ยังไม่ดื่ม จนกระทั่ง 10 นาทีผ่านไปจึงดื่ม ส่วนรองอธิการบดีทิ้งถ้วยกาแฟของตนนั้นไว้จนครบ 10 นาที จึงดื่มหมดขนาดเท่ากันลงไป คนแล้วดื่ม ใครจะเป็นผู้ดื่มกาแฟที่ร้อนกว่า

* 1 บาร์เรลมี 116.55 ลิตร

3. กฎการดูดกลืนของลัมเบิร์ต (Lambert's law of absorption) กล่าวว่าเปอร์เซ็นต์ของแสงตกกระทบถูกดูดกลืนในชั้นของวัตถุโปร่งแสง แปรผันตรงกับความหนาของชั้นวัตถุนั้น ถ้าแสงแดดฉายลงในแนวตั้งฉากกับมหาสมุทร และความเข้มลดลงครึ่งหนึ่ง ณ ความลึก 10 ฟุต ถ้าความเข้มของแสงในระดับที่พอมองเห็นได้เป็น $\frac{1}{6}$ ของความเข้มของแสงบนผิวน้ำ จะลงไปมองเห็นได้ลึกที่สุดเท่าไร

4. (ปัญหาการกวาดหิมะ) วันหนึ่งมีหิมะตกหนักในอัตราสม่ำเสมอ รถกวาดหิมะออกกวาดหิมะในตอนเที่ยงได้ระยะทาง 2 ไมล์ในชั่วโมงแรก และ 1 ไมล์ในชั่วโมงที่สอง จงหาเวลาที่หิมะเริ่มตก (ข้อแนะ สมมติรถสามารถกวาดหิมะได้ k ลบ.ไมล์ต่อชั่วโมง)

t เป็นเวลานับจากเที่ยงเป็นต้นไป

$x(t)$ ความหนาของหิมะ ณ เวลา t

$y(t)$ เป็นระยะทางที่กวาดได้

w เป็นความกว้างของไถ

s อัตราเพิ่มความสูงของหิมะ

จะได้ $wx \frac{dy}{dt} = k$

แทนค่า $x = s(t+t_0)$ โดย t_0 เป็นจำนวนชั่วโมงก่อนเที่ยงที่หิมะเริ่มตก)

5. ทรงกระบอกกลมแบบตั้งฉากมีรัศมี 10 ฟุต ความสูง 20 ฟุต บรรจุน้ำเต็ม เจาะรูเส้นผ่านศูนย์กลาง 1 นิ้ว จงหาว่าเมื่อใดน้ำจึงจะไหลออกหมด เมื่อ $v = \sqrt{2gh}$ *

6. จงหาสมการโค้งซึ่งผ่านจุด $(4, 2)$ ซึ่งเส้นสัมผัส เส้นระดับผ่านจุดสัมผัส แกน x และแกน y ก่อให้เกิดรูปสี่เหลี่ยมคางหมูพื้นที่ 6 ตารางหน่วย

7. จงหาสมการโค้งซึ่งผ่านจุด $(1, 5)$ และเส้นสัมผัสกับเส้นนอร์มัล และแกน y จะประกอบกันเป็นรูปสามเหลี่ยมมีพื้นที่เท่ากับค่าความชันของเส้นสัมผัส

8. เรือพิฆาตกำลังตามล่าเรือดำน้ำในบริเวณที่มีหมอกหนาแน่น ขณะหนึ่งบังเอิญหมอกจางลงชั่วคราว เห็นเรือดำน้ำบนผิวน้ำไหลออกไป 3 ไมล์ แล้วหมอกลงบังทึบอีก ความเร็วของเรือพิฆาตเป็น 2 เท่าของเรือดำน้ำ ถ้าทราบว่าเรือดำน้ำจะรีบดำลงด้วยความเร็วเต็มกำลังในแนวตรง แต่ไม่ทราบทิศทาง เรือพิฆาตควรแล่นในทิศทางใด เพื่อจะได้แล่นผ่านเหนือเรือดำน้ำพอดี (ข้อแนะ ใช้พิกัดเชิงขั้วให้จุดที่เรือดำน้ำถูกพบครั้งแรกเป็นจุดกำเนิด และความยาวโค้ง $r = f(\theta)$)

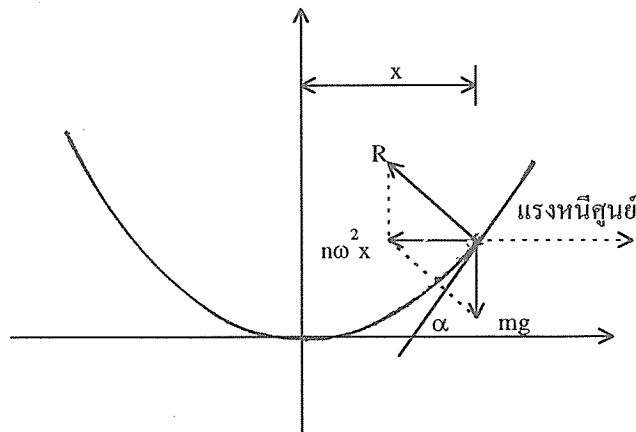
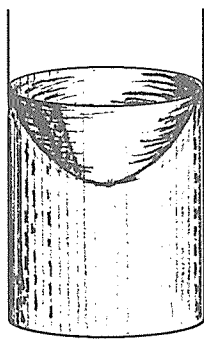
คือ
$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2} d\theta^{**}$$

* v เป็นความเร็วที่น้ำออกใช้หลักพลังงานศักย์ $mgh =$ พลังงานกล $\frac{1}{2} mv^2$ ซึ่งจะได้

$v = \sqrt{2gh}$ เป็นความจริงที่ว่า ถ้าระดับน้ำสูงกว่า จะได้น้ำพุ่งออกแรงกว่า

** ได้จาก $x = f(\theta) \cos \theta$, $y = f(\theta) \sin \theta$ แล้วใช้สูตร $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2} d\theta$

9. กระป๋องบรรจุน้ำส่วนหนึ่งหมุนรอบแกนของมันด้วยความเร็วเชิงมุม ω จงแสดงว่าผิวของน้ำในกระป๋องจะมีรูปเป็นผิวที่เกิดจากการหมุนพาราโบลารอบแกน (ข้อแนะ แรงหนีศูนย์กลางของอนุภาค น้ำมวล m ในผิวอิสระเป็น $m\omega^2 x$ เมื่อ x เป็นระยะห่างของอนุภาคกับแกน แรงหนีศูนย์กลางนี้จะเป็แรงลัทธิของน้ำหนัก mg กับแรงปฏิกิริยา R เนื่องจากอนุภาคน้ำที่อยู่ข้าง ๆ)



10. กฎของนิวตันเกี่ยวกับแรงโน้มถ่วงทั่วไป (Newton's law of universal gravitation) กล่าวว่า วัตถุมวล M_1 และ M_2 ในจักรวาลจะมีแรงดึงดูด แปรผันโดยตรงกับผลคูณ $M_1 M_2$ และส่วนกลับของกำลังสองของระยะห่าง นั่นคือ

$$F = G \frac{M_1 M_2}{d^2}$$

โดย F เป็นแรงดึงดูด d เป็นระยะห่าง และ G เป็นตัวคงค่าของการแปรผัน
 ยิงวัตถุขึ้นจากผิวโลกด้วยความเร็วต้น $v_0 = \sqrt{2gR}$ ซึ่งเป็นความเร็วที่หนีจากโลกได้ (วัตถุไม่แล่นกลับสู่พื้นโลก) ถ้าไม่คำนึงถึงอิทธิพลของดวงจันทร์ และดาวอื่น ๆ
 จงแสดงว่าความเร็วของวัตถุเมื่อถูกยิงไปสูงถึง r คือ

$$v = \sqrt{\frac{2gR^2}{r+R}}$$

เมื่อ R เป็นรัศมีของโลก

11. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท ในระบบสัจพจน์ S ต่อไปนี้

ระบบสัจพจน์ S

อนิยาม : เซต

นิยาม	N	เป็นจำนวนเต็มบวก จำนวนหนึ่ง
	T	เป็นจำนวนจริงบวก จำนวนหนึ่ง
	t	แทนเวลา หมายถึง จำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ

สัญพจน์ A_1 : จำนวนเซลล์ ในเวลา t เป็นฟังก์ชันของ t, T และ N

ถ้าฟังก์ชันนี้เขียนแทนด้วย $f(N, T, t)$ = จำนวนเซลล์ ณ เวลา t แล้ว

$$f(N, T, 0) = N \text{ และ } f(N, T, t+T) = 2f(N, T, t) \text{ สำหรับทุก } t$$

A_2 : ฟังก์ชัน $f(N, T, t)$ หาอนุพันธ์เทียบกับ t ได้

A_3 : สำหรับแต่ละค่าของ N และ T จะมี k ซึ่ง $\frac{df}{dt} = kf$

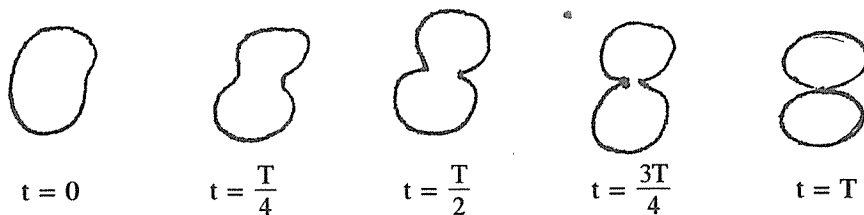
ทฤษฎีบทที่ 1 $f(N, T, t) = N \cdot 2^{t/T}$

ทฤษฎีบทที่ 2 เวลาที่ใช้ในการเพิ่มจำนวนเซลล์จาก N ถึง n คือ

$$t = T \log_2\left(\frac{n}{N}\right)$$

ทฤษฎีบทที่ 3 ในขณะเวลา t อัตราการเพิ่มจำนวนเซลล์กำหนดได้จากสูตร

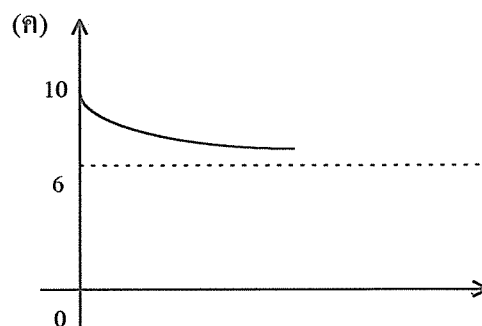
$$\left(\frac{N}{T}\right)(2^{t/T})(\ln 2)$$



คำตอบแบบฝึกหัดระคน

1. (ก) $P'(t) + 3P(t) = 18$

(ข) $P(t) = 6 + 4e^{-3t}$



2. (ก) $\frac{dy}{dt} = -k[y - M]$

(ข) $(\frac{\ln 5}{\ln 2} - 1)$ ชั่วโมง

(ค) อธิการบดี

3. 40 ฟุต

4. ประมาณ 37 นาทีก่อนเที่ยง

5. 18 ชั่วโมง

6. $2xy - y^3 = 8$

7. $y = 6 - \sqrt{2-x^2}$

8. แล่นตรงไปที่จุดกำเนิด 2 ไมล์ แล้วแล่นออกตามโค้ง $r = e^{\pm \frac{\theta}{\sqrt{3}}}$

11. ทฤษฎีบทที่ 1 ใช้ $\ln f(N, T, t) - \ln f(N, T, 0) = kt$

และ $f(N, T, T) = 2N$

บทที่ 4

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับ n

ในบทที่ 2 เราแก้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 ในบทนี้ จะกล่าวถึงการแก้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงขึ้น แต่จะไม่คลุมทั้งหมด จะกล่าวเฉพาะสมการเชิงเส้น และเน้นการแก้สมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวคงค่า

4.1 รูปสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับ n

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับ n (linear differential equation of order n) มีรูปทั่วไปดังนี้

$$b_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + b_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + b_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + b_n(x)y = R(x) \quad \dots\dots\dots(1)$$

ซึ่ง $b_0(x) \neq 0$

จงสังเกตว่า $R(x)$ และ $b_i(x)$, $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ ไม่ขึ้นกับ y

ถ้า $b_i(x) =$ ตัวคงค่า เรากล่าวว่า สมการ (1) เป็นสมการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวคงค่า

ถ้า $R(x) = 0$ เรากล่าวว่า สมการ (1) เป็นสมการเอกพันธ์ (homogeneous equation)

ตัวอย่าง 4.1.1

สมการ	แบบ
1) $x^2 y' + 2y = e^x$	เชิงเส้น
2) $2y'' + 3y' + xy = 0$	เชิงเส้นเอกพันธ์
3) $y''' - y'' + 12y = 7x$	เชิงเส้น สัมประสิทธิ์ตัวคงค่า
4) $y'' + 5y' + 6y = 0$	เชิงเส้นเอกพันธ์ สัมประสิทธิ์ตัวคงค่า
5) $3(y')^2 + y = 0$	มิใช่เชิงเส้น
6) $yy' + xy = 0$	มิใช่เชิงเส้น
7) $y'' + 2y' + \frac{1}{y} = x$	มิใช่เชิงเส้น

ทฤษฎีบท 4.1.1 (Existence and Uniqueness Theorem of Linear Equations of order n)

กำหนดให้ $a_1, \dots, a_n, b$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I บางช่วง $x_0 \in I$

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$ เป็นตัวคงค่าใด ๆ

จะมีคำตอบ ϕ เพียงคำตอบเดียวของสมการ

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = R(x)$$

ที่มีนิยามบน I และสอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\phi(x_0) = \alpha_1, \phi'(x_0) = \alpha_2, \dots, \phi^{(n-1)}(x_0) = \alpha_n$$

เราจะไม่พิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ สำหรับการพิสูจน์ดู ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS (หน้า 239-261 แต่งโดย Coddington)

4.2 สมการเอกพันธ์

ในหัวข้อนี้จะแสดงว่า เซตของคำตอบของสมการเอกพันธ์มีคุณสมบัติเป็นปริภูมิเวกเตอร์ เพื่อจะได้ศึกษา ฐาน(basis) และการเขียนคำตอบทั่วไปในรูปผลรวมเชิงเส้น(linear combination) ของฐาน

ทฤษฎีบท 4.2.1 ถ้า $y = y_1(x)$ และ $y = y_2(x)$ เป็นคำตอบของสมการเอกพันธ์

$$b_0(x)y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \dots + b_n(x)y = 0 \dots \dots \dots (2)$$

และ c_1, c_2 เป็นตัวคงค่าใด ๆ จะได้

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 \text{ เป็นคำตอบของสมการนี้ด้วย}$$

พิสูจน์ เนื่องจาก $y = y_1$ และ $y = y_2$ เป็นคำตอบของสมการ (2) จะได้

$$b_0y_1^{(n)} + b_1y_1^{(n-1)} + \dots + b_ny_1 = 0 \text{ และ}$$

$$b_0y_2^{(n)} + b_1y_2^{(n-1)} + \dots + b_ny_2 = 0 \text{ เป็นจริง}$$

แทนค่า $y = c_1y_1 + c_2y_2$ ในซ้ายมือสมการ (2) ได้

$$\begin{aligned} & b_0(c_1y_1 + c_2y_2)^{(n)} + b_1(c_1y_1 + c_2y_2)^{(n-1)} + \dots + b_n(c_1y_1 + c_2y_2) \\ = & b_0(c_1y_1^{(n)} + c_2y_2^{(n)}) + b_1(c_1y_1^{(n-1)} + c_2y_2^{(n-1)}) + \dots + b_n(c_1y_1 + c_2y_2) \\ = & c_1(b_0y_1^{(n)} + b_1y_1^{(n-1)} + \dots + b_ny_1) + c_2(b_0y_2^{(n)} + b_1y_2^{(n-1)} + \dots + b_ny_2) \\ = & c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 \\ = & 0 \quad \square \end{aligned}$$

ในทฤษฎีบท 4.2.1 เรียกฟังก์ชัน $y = c_1y_1 + c_2y_2$ ว่าผลรวมเชิงเส้นของ y_1 และ y_2 ผลจากทฤษฎีบท 4.2.1 สามารถขยายได้เป็น

ถ้า $y_1, y_2, \dots, y_k$ เป็นคำตอบของสมการเชิงเส้นเอกพันธ์

$$b_0(x)y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \dots + b_n(x)y = 0$$

จะได้ว่า ผลรวมเชิงเส้น

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ky_k \quad \text{ทุกรูปแบบเป็นคำตอบของสมการนี้ด้วย}$$

ทฤษฎีบท 4.2.2 เซตคำตอบของสมการเอกพันธ์

$$b_0y^{(n)} + b_1y^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}y' + b_ny = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$b_i = b_i(x); i = 0, 1, \dots, n$$

เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนามของจำนวนเชิงซ้อน C

เรียกเซตคำตอบนี้ว่าปริภูมิคำตอบ (solution space) ของสมการนี้แทนด้วย K

พิสูจน์ 1. สมบัติปิด ถ้า y_1 และ y_2 เป็นคำตอบของ (2) จะได้

$$y = ly_1 + ly_2 = y_1 + y_2 \quad \text{เป็นคำตอบของ (2) ด้วย}$$

(จากทฤษฎีบท 4.2.1)

2. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม เป็นจริงตามคุณสมบัติการบวกฟังก์ชันของจำนวน

3. สมบัติการมีเอกลักษณ์การบวก เนื่องจาก $y = 0$ เป็นคำตอบของ (2)

และสำหรับทุก y_0 , $0 + y_0 = y_0$ ดังนั้น $y = 0$ เป็นเอกลักษณ์การบวก

4. สมบัติการมีอินเวอร์สการบวก ถ้า y_0 เป็นคำตอบของ (2) จะได้ y_0 มีอนุพันธ์

ถึงอันดับที่ n ดังนั้น $(-y_0)^{(k)} = -y_0^{(k)} \quad k = 1, \dots, n$ และ

$$\begin{aligned} & b_0(-y_0)^{(n)} + b_1(-y_0)^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}(-y_0)' + b_n(-y_0) \\ &= -[b_0y_0^{(n)} + b_1y_0^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}y_0' + b_ny_0] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$-y_0$ เป็นคำตอบของ (2) และ $-y_0 + y_0 = 0$

5. สมบัติการสลับที่การบวก เป็นจริงตามสมบัติการบวกฟังก์ชันของจำนวน

6. นิยามฟังก์ชันจาก $C \times K$ ไป K ดังนี้ สำหรับทุกจำนวนเชิงซ้อน c และทุกคำตอบ y ให้ผลคูณสเกลาร์ของ c กับ y คือ cy เป็นฟังก์ชันที่เกิดจากการนำตัวคูณค่าคูณฟังก์ชัน ดังนั้น $cy \in K$ และ

$$6.1 \quad c(y_1 + y_2) = cy_1 + cy_2$$

$$6.2 \quad (c_1 + c_2)y = c_1y + c_2y$$

$$6.3 \quad c_1(c_2y) = (c_1c_2)y$$

$$6.4 \quad 1y = y$$

ดังนั้น K เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนาม C $\square$

ต่อไปเราจะศึกษาพื้นฐานความรู้เกี่ยวกับฐาน (basis) ของ K เริ่มตั้งแต่นิยามของความเป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น และวงวนสเกียน

4.3 ความเป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น

บทนิยาม 4.3.1 ฟังก์ชัน $y_1, y_2, \dots, y_n$ ของ x เป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น (linearly independent) บนช่วง $a \leq x \leq b$ ก็ต่อเมื่อมีตัวคงค่า $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ ชุดเดียวเท่านั้นที่ทำให้ผลรวมเชิงเส้น $c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$ เป็น 0 ถ้ามีตัวคงค่าชุดอื่น $c_1, c_2, \dots, c_n$ (ซึ่ง c บางตัวไม่เป็น 0) ทำให้ผลรวมเชิงเส้นเป็น 0 เรากล่าวว่าฟังก์ชันเหล่านี้ขึ้นต่อกันเชิงเส้น (linearly dependent)

ข้อสังเกต บทนิยามของความเป็นอิสระต่อกันเชิงเส้นเขียนตามภาษาตรรกศาสตร์ได้ว่า

$y_1, y_2, \dots, y_n$ เป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อ

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n = 0 \rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

ตัวอย่าง 4.3.1 ก. $x, 2x, x^2$ ขึ้นต่อกันเชิงเส้น เพราะเรามี

$$-2(x) + 1(2x) + 0x^2 = 0$$

ใช้ $c_1 = -2, c_2 = 1, c_3 = 0$ ได้โดยไม่ต้องเป็น 0 ทั้งหมด

ข. ถ้า w, α เป็นตัวคงค่า $\sin wt, \cos wt, \sin(wt - \alpha)$ ขึ้นต่อกันเชิงเส้น

เพราะ $\sin(wt - \alpha) = \sin wt \cos \alpha - \cos wt \sin \alpha$ ซึ่งเราจะได้

$$(\cos \alpha) \sin wt + (-\sin \alpha) \cos wt + (-1) \sin(wt - \alpha) = 0$$

โดย $c_1 = \cos \alpha, c_2 = -\sin \alpha, c_3 = -1$ ไม่ต้องเป็น 0

ตัวอย่าง 4.3.2 พิจารณา $t, \sin t, e^t$ เป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น ถ้าตัวคงค่า c_1, c_2, c_3 ทำให้

$$c_1 t + c_2 \sin t + c_3 e^t = 0 \text{ ทุกค่าของ } t \dots\dots\dots(A)$$

เมื่อ $t = 0$ จะได้ $c_1 0 + c_2 0 + c_3 1 = 0$ จำเป็นที่ $c_3 = 0$ ดังนั้น (A) เป็น

$$c_1 t + c_2 \sin t = 0 \text{ ทุกค่าของ } t \dots\dots\dots(B)$$

เมื่อ $t = \pi$ จะได้ $c_1 \pi + c_2 0 = 0$ จำเป็นที่ $c_1 = 0$

ดังนั้น (B) เป็น $c_2 \sin t = 0$ ทุกค่าของ $t \dots\dots\dots(C)$

เมื่อ $t = \frac{\pi}{2}$ จะได้ $c_2 \sin \frac{\pi}{2} = 0$ จำเป็นที่ $c_2 = 0$

ดังนั้น ถ้า (A) เป็นจริง จำเป็นที่ $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ (มีจะนั้นผลรวมเชิงเส้นนี้จะ

ไม่เป็น 0 ณ บางค่าของ t) เพราะฉะนั้น $t, \sin t, e^t$ เป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น

ตัวอย่าง 4.3.3 ฟังก์ชัน $1, x, x^2, \dots, x^n$ เป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น เพราะถ้า

$$c_1 \cdot 1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_{n-1} x^{n-1} + c_n x^n = 0$$

$$\text{จะได้ } c_2 + 2c_3 x + \dots + (n-1)c_{n-1} x^{n-2} + nc_n x^{n-1} = 0$$

$$2c_3 + \dots + (n-2)(n-1)c_{n-1} x^{n-3} + n(n-1)c_n x^{n-2} = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$(n-1)! c_{n-1} + n(n-1) \dots 2c_n x = 0$$

$$(n!) c_n = 0$$

โดยการหาอนุพันธ์ติดต่อกัน n ครั้ง

สมการที่ได้ชุดนี้เป็นจริง เมื่อ $x = 0$ ดังนั้นจำเป็นที่

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

ตัวอย่าง 4.3.4 จงพิสูจน์ว่าฟังก์ชัน

$$e^{k_1 x}, x e^{k_1 x}, \dots, x^{n_1} e^{k_1 x},$$

$$e^{k_2 x}, x e^{k_2 x}, \dots, x^{n_2} e^{k_2 x},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$e^{k_m x}, x e^{k_m x}, \dots, x^{n_m} e^{k_m x}$$

ซึ่งเมื่อ $i \neq j$ เราได้ $k_i \neq k_j$,

จะเป็นอิสระต่อกันเชิงเส้นบนช่วง $a \leq x \leq b$ ใด ๆ

พิสูจน์ สมมติฟังก์ชันดังกล่าวไม่เป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น จะสามารถเขียนผลรวมเชิงเส้นที่เป็น 0 ของฟังก์ชันเหล่านี้ได้ในรูป

$$P_1(x)e^{k_1 x} + P_2(x)e^{k_2 x} + \dots + P_m(x)e^{k_m x} = 0 \dots\dots\dots(1)$$

โดย $P_i(x)$ เป็นพหุนาม ซึ่งมีดีกรีไม่เกิน n_i และจะมีอย่างน้อยหนึ่งพหุนาม ไม่เป็น 0

และเนื่องจากเราสามารถสลับที่ผลบวกใน (1) ให้พจน์สุดท้ายไม่เป็น 0 ได้ เราจึง

สมมติรูปสมการ (1) เป็นรูปที่ $P_m(x) \neq 0$

หารเอกลักษณ์ (1) ด้วย $e^{k_1 x}$ แล้วหาอนุพันธ์ติดต่อกัน $n_1 + 1$ ครั้ง

จะได้เอกลักษณ์ $0 + Q_2(x)e^{(k_2-k_1)x} + \dots + Q_m(x)e^{(k_m-k_1)x} = 0 \dots\dots\dots (2)$

ซึ่งดีกรีของ Q_i และ P_i ($i = 2, 3, \dots, m$) เท่ากัน เพราะในการหาอนุพันธ์

$P(x)e^{ax}$ ได้ $[aP(x) + P'(x)]e^{ax}$

จากข้อความ ดีกรีของ Q_m และ P_m เท่ากัน สรุปได้ว่า $Q_m(x) \neq 0$

หาร (2) ด้วย $e^{(k_2-k_1)x}$ แล้วหาอนุพันธ์ติดต่อกัน n_2+1 ครั้ง ได้เอกลักษณ์

$$0 + 0 + \dots + R_m(x) e^{(k_m-k_2)x} = 0$$

ใช้ขบวนการเดิมติดต่อกัน $m-1$ ครั้ง นับแต่กระบวนการจากเอกลักษณ์ (1) ไป (2)

เป็นครั้งแรก จะได้เอกลักษณ์สุดท้าย

$$S_m(x) e^{(k_m-k_{m-1})x} = 0$$

ซึ่งเกิดการขัดแย้ง เพราะ $S_m(x) \neq 0$ และ $e^{(k_m-k_{m-1})x} \neq 0$

ดังนั้น ฟังก์ชันดังกล่าวเป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น $\square$

ทฤษฎีบท 4.3.1 ถ้า S เป็นเซตจำกัดของฟังก์ชันที่เป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น ทุกสับเซต $M \neq \emptyset$ ของ S จะเป็นเซตของฟังก์ชันที่เป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น

พิสูจน์ ให้ $S = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ เป็นเซตของฟังก์ชันที่เป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น

โดยไม่สูญเสียความกว้างขวางของทฤษฎีบท เราให้

$$M = \{f_1, f_2, \dots, f_r\}, r \leq n$$

$$\text{ให้ } c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_r f_r = 0$$

$$\text{จะได้ } c_1 f_1 + \dots + c_r f_r + 0f_{r+1} + 0f_{r+2} + \dots + 0f_n = 0$$

และ $c_1 = c_2 = \dots = c_r = 0$ เพราะ $f_1, f_2, \dots, f_n$ เป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น

ดังนั้น $f_1, f_2, \dots, f_r$ เป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น $\square$

ข้อสังเกต โดยทฤษฎีบท 4.3.1 และตัวอย่าง 4.3.4 จะได้

(1) $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \dots, e^{k_m x}$ ซึ่งเมื่อ $i \neq j$ เราได้ $k_i \neq k_j$, เป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น

(2) $e^{k_1 x}, xe^{k_1 x}, \dots, x^{n_1} e^{k_1 x}$ เป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น

(3) $e^{k_1 x}, xe^{k_1 x}, x^2 e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, xe^{k_2 x}, e^{k_3 x}$ โดย $k_1 \neq k_2, k_1 \neq k_3, k_2 \neq k_3$,

เป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น

บทนิยาม 4.3.2 ถ้าฟังก์ชัน $f_1, f_2, \dots, f_n$ ต่างมีอนุพันธ์ถึงอันดับที่ $n-1$ เรียกดีเทอร์มิแนนต์

$$w(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f'_1(x) & f'_2(x) & \dots & f'_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

ว่า วรอนสเกียน (Wronskian หรือ Wronski's Determinant)*

ทฤษฎีบท 4.3.2 ถ้าวรอนสเกียน w ของฟังก์ชัน $y_1, y_2, \dots, y_n$ ไม่เป็น 0 ณ บางค่าของ x จะได้ฟังก์ชันเหล่านี้เป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น

พิสูจน์ พิจารณาผลรวมเชิงเส้นที่เป็นฟังก์ชันศูนย์ของ $y_1, y_2, \dots, y_n$

$$\left. \begin{aligned} c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n &= 0 \\ \text{จะได้ } c_1 y'_1 + c_2 y'_2 + \dots + c_n y'_n &= 0 \\ \dots &\dots \\ \text{จนกระทั่ง } c_1 y_1^{(n-1)} + c_2 y_2^{(n-1)} + \dots + c_n y_n^{(n-1)} &= 0 \end{aligned} \right\} (A)$$

ณ แต่ละค่าของ x ทั้ง n สมการนี้ จะเป็นระบบสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธ์

แทนด้วย (A) สมมติ ณ x_0 เราได้

$$w(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) & \dots & y'_n(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

* เราใช้วรอนสเกียนทดสอบความเป็นอิสระต่อกัน
เชิงเส้นของฟังก์ชันมีข้อจำกัดว่า ฟังก์ชันทั้ง n
ฟังก์ชันที่จะทดสอบมีอนุพันธ์ถึงอันดับที่ $n-1$

Höene Wronski (1778 - 1853)

เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวโปแลนด์
ใช้ชีวิตส่วนใหญ่ในฝรั่งเศส



จะได้ระบบสมการ (A) ณ ค่า x_0 มีคำตอบสำหรับ c_i ชุดเดียว กล่าวคือ

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

และจะได้ว่า คำตอบของระบบสมการ (A) สำหรับทุกค่า x คือ คำตอบชุดนี้

ดังนั้น คำตอบของ $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n = 0$ คือ $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$

ดังนั้น $y_1, y_2, \dots, y_n$ เป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น $\square$

ตัวอย่าง 4.3.5 จงทดสอบว่า ฟังก์ชัน $\sin x, \cos x, \sin 2x$ เป็นอิสระต่อกันเชิงเส้นหรือไม่

วิธีทำ วรอนสเกียนของทั้งสามฟังก์ชันคือ

$$\begin{aligned} w(x) &= \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & \sin 2x \\ \cos x & -\sin x & 2 \cos 2x \\ -\sin x & -\cos x & -4 \sin 2x \end{vmatrix} \\ &= -\sin 2x + 0 + 4 \sin 2x \\ &= 3 \sin 2x \end{aligned}$$

เราจะได้ $w\left(\frac{\pi}{6}\right) \neq 0$

ดังนั้น $\sin x, \cos x, \sin 2x$ เป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น

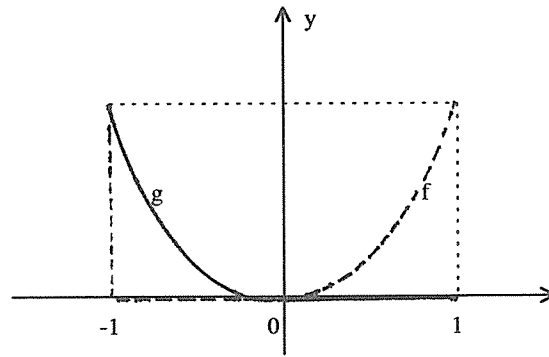
ตัวอย่าง 4.3.6 จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x \leq 1 \end{cases} \quad \text{และ} \quad g(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x \leq 0 \\ 0, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

เป็นอิสระต่อกันในช่วง $-1 \leq x \leq 1$ หรือไม่

วิธีทำ เนื่องจาก f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ วรอนสเกียน คือ

$$w(x) = \begin{cases} \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix}, & -1 \leq x \leq 0 \\ \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 0 \end{vmatrix}, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$



ดังนั้น $w(x) = 0$ ณ ทุกค่าของ x ใช้รอนเกียนตัดสินความเป็นอิสระต่อกัน
เชิงเส้นมิได้

พิจารณา $c_1 f(x) + c_2 g(x) = 0$ ทุกค่า x

ดังนั้น เมื่อ $x = -\frac{1}{2}$ ได้ $c_1 \cdot 0 + c_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 0$ และ $c_2 = 0$

อนึ่ง เมื่อ $x = \frac{1}{2}$ ได้ $c_1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + c_2 \cdot 0 = 0$ และ $c_1 = 0$

ดังนั้น f และ g เป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น ในช่วง $-1 \leq x \leq 1$

ข้อสังเกต จากตัวอย่าง 4.3.6 บทกลับของทฤษฎีบท 4.3.2 ไม่เป็นจริง แต่ถ้าเพิ่มเงื่อนไข
ของบทกลับด้วยเงื่อนไขบางประการย่อมสรุปผลของบทกลับได้ ดังทฤษฎีบท
ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.3.3 ถ้า $y_1, y_2, \dots, y_n$ เป็นคำตอบของสมการเอกพันธ์ และ $w(x) = 0$ ทุกค่า x

จะได้ว่า $y_1, y_2, \dots, y_n$ ขึ้นต่อกันเชิงเส้น

พิสูจน์ ถ้า $y_1, y_2, \dots, y_n$ เป็นอิสระต่อกันเชิงเส้นบนช่วง $[a, b]$ แต่ $w(x) = 0$

ทุกค่า x ในช่วงนี้ ณ $x = x_0$ จะได้ระบบสมการ

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) = 0$$

$$c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + \dots + c_n y_n'(x_0) = 0$$

.....

$$c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

มีคำตอบชุดอื่น สำหรับ c_i กล่าวคือ ในคำตอบชุดอื่น มีบาง c_i ไม่เป็น 0

ทำให้ผลรวมเชิงเส้นที่เกิดจาก c_i ชุดนี้ คือ

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

เป็นคำตอบของ (2) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

(ดูสมการ (2) หน้า 129)

แต่เรามีคำตอบอื่นอีกที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$

คำตอบนั้นได้แก่ $y = 0$

ดังนั้น จะมีคำตอบอย่างน้อยสองคำตอบตามเงื่อนไข

$$y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

ขัดแย้งกับทฤษฎีบท 4.1.1 (Existence and Uniqueness Theorem)

ดังนั้น ถ้า $y_1, y_2, \dots, y_n$ เป็นคำตอบที่เป็นอิสระต่อกันเชิงเส้นของสมการ (1) จะได้

วронสเกียน $w(x) \neq 0$ ณ บางค่าของ x ในช่วงนั้น $\square$

ข้อสังเกต โดยทฤษฎีบท 4.3.2 และ 4.3.3 เราสรุปได้ว่าฟังก์ชัน $y_1, y_2, \dots, y_n$ ที่เป็นคำตอบของสมการเอกพันธ์ (1) จะเป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อ $w(x) \neq 0$ ณ บางค่าของ x

แบบฝึกหัด 4.3

1. กำหนด $f_1 = x, f_2 = e^x, f_3 = xe^x, f_4 = (2 - 3x)e^x$ จงแสดงว่าฟังก์ชันเหล่านี้ขึ้นต่อกันเชิง

เส้นหรือไม่ โดยการหาค่า c_1, c_2, c_3, c_4 จากสมการ $c_1f_1 + c_2f_2 + c_3f_3 + c_4f_4 = 0$

2. ฟังก์ชันชุดต่อไปนี้ อิสระต่อกันเชิงเส้นหรือไม่ (ไม่ใช้วронสเกียน)

ก. $t, t+1, t+5$ ข. $(t-1)(t-2), (t-2)(t-3), (t-3)(t-1)$

ค. $1, (t+1)(t+4), (t+2)(t+3)$ ง. $e^t, t-3, 6-2t$

จ. $\sin 2t, \sin t, \cos t$ ฉ. $\cos 2t, \cos^2 t, 1$

ช. $\sin(t + \frac{\pi}{3}), \sin(t + \frac{\pi}{4}), \sin(t + \frac{\pi}{6})$

ซ. $t, |t|$ บนช่วง $-3 \leq t \leq 0$ หรือบนช่วง $-1 \leq t \leq 1$

ณ. e^x, e^{2x}, e^{-x}

ญ. $x, e^{2x}, \cos x$

ฎ. $e^x, xe^x, \sinh x (= \frac{e^x - e^{-x}}{2})$

ฏ. $1, \sin x, \cos x$

ฐ. $1, \sin^2 x, \cos^2 x$

3. จงตัดสินว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ชุดใด เป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น

ก. $\sinh x, e^x, e^{-x}$

ข. $\sin 3x, \sin x, \sin^3 x$

ค. $1+x, 1+2x, x^2$

ง. $\cos x, \sin x, \sin(x + \frac{\pi}{4})$

จ. $e^x \sin x, e^x \cos x$

4. ถ้า $f_1(x) = e^{r_1 x}, f_2(x) = e^{r_2 x}, \dots, f_n(x) = e^{r_n x}$

ก. จงแสดงว่าเขียนวอร์อนสเกียนในรูป $w(x) = e^{(r_1+r_2+\dots+r_n)x} D_n$ ได้

เรียก D_n ว่าดีเทอร์มิแนนท์ของวองแดร์มง (Vandemonde's determinant)

$$\begin{aligned} \text{ข. จงแสดงว่า } D_n &= \prod_{n \geq r_i > r_j \geq 1} (r_i - r_j) \\ &= (r_2 - r_1)(r_3 - r_1) \dots (r_n - r_1) \\ &\quad (r_3 - r_2) \dots (r_n - r_2) \\ &\quad \dots \dots \dots \\ &\quad (r_n - r_{n-1}) \end{aligned}$$

ค. ถ้า $r_i \neq r_j$ ในกรณีที่ $i \neq j$ จงแสดงว่า $f_1, f_2, \dots, f_n$ เป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น

5. จงแสดงว่า $y_1 = x^2$ และ $y_2 = x|x|$ มีค่า วอร์อนสเกียนเป็น 0 เมื่อ $-1 \leq x \leq 1$

แต่ y_1, y_2 เป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น

คำตอบแบบฝึกหัด 4.3

1. ขึ้นต่อกันเชิงเส้น
2. ข. จ. ฉ. ณ. ฎ. ฏ. อิสระต่อกันเชิงเส้น นอกนั้นขึ้นต่อกันเชิงเส้น
3. ก. ค. จ. อิสระต่อกันเชิงเส้น นอกนั้นขึ้นต่อกันเชิงเส้น

4.4 ตัวดำเนินการดิฟเฟอเรนเชียลเชิงเส้น

ในข้อนี้ เราจะศึกษาตัวดำเนินการดิฟเฟอเรนเชียลเชิงเส้น (linear differential operator) ซึ่งมีบทบาทอย่างมากในทฤษฎี คำตอบของสมการเชิงเส้น และการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น เราเริ่มจากตัวดำเนินการดิฟเฟอเรนเชียลง่าย ๆ ต่อด้วยตัวดำเนินการดิฟเฟอเรนเชียลอันดับ n ซึ่งเกิดจากการประกอบตัวดำเนินการดิฟเฟอเรนเชียลง่าย ๆ เหล่านั้น

บทนิยาม 4.4.1 กำหนดให้ x เป็นตัวแปรอิสระ เรานิยามตัวดำเนินการ

$$\begin{aligned} Dy &= \frac{dy}{dx} \\ D^k y &= \frac{d^k y}{dx^k}, \quad k \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก} \end{aligned}$$

จงสังเกตว่า

$$\begin{aligned} D(Dy) &= D^2 y \\ D^m (D^n y) &= D^{m+n} y, \quad m, n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก} \\ D^m (cy) &= cD^m y, \quad c \text{ ตัวคงค่า, } m \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก} \\ D^k (y_1 + y_2) &= D^k y_1 + D^k y_2 \end{aligned}$$

บทนิยาม 4.4.2 นิยามตัวดำเนินการดิฟเฟอเรนเชียลเชิงเส้น อันดับ n

$$\begin{aligned} L &= a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n \text{ ซึ่ง } a_i = a_i(x), a_0 \neq 0 \\ \text{ดังนี้ } Ly &= a_0 D^n y + a_1 D^{n-1} y + \dots + a_{n-1} Dy + a_n y \\ \text{ทุกฟังก์ชัน } y &\text{ ซึ่งมีอนุพันธ์ถึงอันดับที่ } n \end{aligned}$$

- หมายเหตุ
1. บางตำราเรียก L ว่า ตัวดำเนินการพหุนาม (polynomial operator) เพราะ L มีรูปเป็นพหุนามของ D
 2. ถ้า $a_i(x)$ เป็นตัวคงค่า จาก $i = 0, 1, \dots, n$ เรากล่าวว่า L มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวคงค่า

ตัวอย่าง 4.4.1 ตัวอย่างการใช้ตัวดำเนินการดิฟเฟอเรนเชียลเชิงเส้นพิจารณา

$$\begin{aligned} D^3 x &= 3x^2 \\ D^2 (3x^3) &= 3 \cdot 2x \quad (\text{เกิดจาก } D(3x^2)) \\ D^3 (3x^3) &= 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! \quad (\text{เกิดจาก } D(3 \cdot 2x)) \\ D^4 (3x^3) &= 0 \end{aligned}$$

จะเห็นได้ชัดว่า เมื่อกำลังของ D เท่ากับกำลังของ x ผลที่ได้จะเป็นตัวคงค่า และเมื่อกำลังของ D มากกว่ากำลังของ x ผลที่ได้เป็น 0 ข้อสังเกตนี้จะเป็นจริงในกรณีอื่น ๆ ด้วยนั่นคือ $D^n x^n = n!$, $D^{n+1} x^n = 0$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ตัวอย่าง 4.4.2 ตัวอย่างการใช้ตัวดำเนินการดิฟเฟอเรนเชียลเชิงเส้น

ก. กำหนด $L = 3D^2 + D - 1$

จะได้ $Ly = 3y'' + y' - y$

เราอาจเขียน $(3D^2 + D - 1)y = 3y'' + y' - y$

ข. $(2D^2 + 5D + 6)x^3 = 2D^2 x^3 + 5Dx^3 + 6x^3$
 $= 12x^2 + 15x^2 + 6x^3$

ค. สมการเชิงอนุพันธ์ $y'' + y = \sin x$,
 $7y^{(4)} - y'' + 2y' = 0$
 $4xy' + 12y''' = e^x$

เขียนในรูปสมการที่ใช้ตัวดำเนินการดิฟเฟอเรนเชียลเชิงเส้นได้เป็น

$$(D^2 + 1)y = \sin x,$$

$$(7D^4 - D^2 + 2D)y = 0,$$

$$(4xD + 12D^3)y = e^x \quad \text{ตามลำดับ}$$

บทนิยาม 4.4.3 ถ้า L_1 และ L_2 เป็นตัวดำเนินการดิฟเฟอเรนเชียลเชิงเส้น อันดับ n

$$L_1 = L_2 \quad \text{ก็ต่อเมื่อ } L_1 y = L_2 y$$

สำหรับทุกฟังก์ชัน y ซึ่งมีอนุพันธ์ถึงอันดับที่ n

บทนิยาม 4.4.4 ถ้า L_1 และ L_2 เป็นตัวดำเนินการดิฟเฟอเรนเชียลเชิงเส้น นิยาม $L_1 L_2$ ดังนี้

$$L_1 L_2 y = L_1 (L_2 y)$$

ตัวอย่าง 4.4.3 (ก) ถ้า $L_1 = D + 2$ และ $L_2 = 3D - 1$

$$\begin{aligned} \text{เราได้ } L_1 L_2 y &= L_1 (L_2 y) = L_1 (3y' - y) \\ &= D(3y' - y) + 2(3y' - y) \\ &= 3y'' + 5y' - 2y \\ &= (3D^2 + 5D - 2)y \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } (D + 2)(3D - 1) = 3D^2 + 5D - 2$$

(ข) ถ้า $L_1 = xD^2$ และ $L_2 = xD - 1$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } L_1 L_2 y &= L_1 (xy' - y) \\ &= xD(xy' - y) \\ &= x(xy'' + y' - y') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= x^3 y'' \\
 &= (x^3 D^2)y \\
 \text{ดังนั้น } (x^2 D)(xD-1) &= x^3 D^2 \\
 L_2 L_1 y &= L_2(x^2 y') \\
 &= xD(x^2 y') - x^2 y' \\
 &= x(x^2 y'' + 2xy') - x^2 y' \\
 &= x^3 y'' + x^2 y' \\
 &= (x^3 D^2 + x^2 D)y \\
 \text{ดังนั้น } (xD-1)(x^2 D) &= x^3 D^2 + x^2 D \\
 \text{จึงสังเกตว่า } (x^2 D)(xD-1) &\neq (xD-1)(x^2 D) \neq x^3 D^2 - x^2 D
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.4.2 กำหนด

$$\begin{aligned}
 L_2 &= 3D^2 - D + x - 2 \\
 L_2 &= x^2 D^2 + 4D + 7 \\
 L_1 y + L_2 y &= (3D^2 - D + x - 2)y + (x^2 D^2 + 4D + 7)y \\
 &= 3y'' - y' + (x-2)y + (x^2 y'' + 4y' + 7y) \\
 &= (3D^2 + x^2 D^2 - D + 4D + x - 2 + 7)y
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{และ } c(L_1 y) &= c(3y'' - y' + (x-2)y) \\
 &= 3cy'' - cy' + c(x+2)y \\
 &= [3cD^2 - cD + c(x+2)]y
 \end{aligned}$$

แนวทางในตัวอย่าง 3.4.3 เป็นดังนี้

$$L_1 y + L_2 y \text{ มีรูป } (L_1 + L_2)y$$

$$c(L_1 y) \text{ มีรูป } (cL_1)y$$

เห็นได้ชัดว่า แนวทางนี้ใช้ได้กับทุกตัวดำเนินการ ดังนั้นจึงเป็นธรรมชาติที่จะนิยามตัวดำเนินการ ต่อไปนี้

บทนิยาม 4.4.5 1. $(L_1 + L_2)y = L_1 y + L_2 y$ 2. $(cL)y = c(Ly)$

ทฤษฎีบท 4.4.2 (กฎพื้นฐาน) กฎต่อไปนี้เป็นจริงสำหรับตัวดำเนินการดิฟเฟอเรนเชียลเชิงเส้น

1. กฎการสลับที่การบวก $L_1 + L_2 = L_2 + L_1$
2. กฎการเปลี่ยนกลุ่มของการบวก $(L_1 + L_2) + L_3 = L_1 + (L_2 + L_3)$
3. กฎการเปลี่ยนกลุ่มของการคูณ $(L_1 L_2) L_3 = L_1 (L_2 L_3)$
4. กฎการแจกแจง $L_1 (L_2 + L_3) = L_1 L_2 + L_1 L_3$

พิสูจน์ ให้เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 4.4.3 กำหนดฟังก์ชัน y, z และตัวคงค่า c

- (1) $L(cy) = cLy$
- (2) $L(y+z) = Ly + Lz$
- (3) ถ้า L_1, L_2 มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวคงค่า จะได้ $L_1 L_2 y = (L_1 L_2)y$

โดย $(L_1 L_2)$ หมายถึง รูปผลคูณแบบพหุนามของ L_1 กับ L_2

พิสูจน์ (1) ให้ $L = a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \dots + a_n D^n$

$$\begin{aligned} L(cy) &= a_0(cy) + a_1 D(cy) + a_2 D^2(cy) + \dots + a_n D^n(cy) \\ &= a_0 cy + a_1 cDy + a_2 cD^2 y + \dots + a_n D^n y \\ &= c(a_0 y + a_1 Dy + a_2 D^2 y + \dots + a_n D^n y) \\ &= cLy \end{aligned}$$

(2) ให้ $L = a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \dots + a_n D^n$

$$\begin{aligned} L(y+z) &= a_0(y+z) + a_1 D(y+z) + a_2 D^2(y+z) + \dots + a_n D^n(y+z) \\ &= (a_0 y + a_0 z) + (a_1 Dy + a_1 Dz) + (a_2 D^2 y + a_2 D^2 z) + \dots + (a_n D^n y + a_n D^n z) \\ &= (a_0 y + a_1 Dy + a_2 D^2 y + \dots + a_n D^n y) + (a_0 z + a_1 Dz + a_2 D^2 z + \dots + a_n D^n z) \\ &= Ly + Lz \end{aligned}$$

(3) ให้ $L_1 = \sum_{i=0}^m a_i D^i, L_2 = \sum_{j=0}^n b_j D^j$ โดย $a_0 D^0 = a_0, b_0 D^0 = b_0$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } L_1 L_2 y &= L_1(b_0 y + b_1 y' + \dots + b_n y^{(n)}) \\ &= b_0 \sum_{i=0}^m a_i y^{(i)} + b_1 \sum_{i=0}^m a_i y^{(i+1)} + \dots + b_n \sum_{i=0}^m a_i y^{(i+n)} \\ &= \sum_{j=0}^n (b_j \sum_{i=0}^m a_i y^{(i+j)}) \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m b_j a_i y^{(i+j)} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_i b_j y^{(i+j)}$$

$$= (L_1 L_2)y \quad \square$$

หมายเหตุ จากทฤษฎีบท 4.4.3 ข้อ (1) , (2) จะได้ L เป็นการแปลงเชิงเส้น (Linear transformation) ซึ่งมีคุณสมบัติพิเศษหลายประการ เช่น

$$L(0) = 0, L(-y) = -Ly \quad \text{เป็นต้น}$$

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ โดยอาศัยคุณสมบัติ $L_1 L_2 y = (L_1 L_2)y$ ซึ่งมีข้อจำกัดคือ L_1, L_2 ต้องเป็นตัวดำเนินการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวคงค่า

ตัวอย่าง 4.4.4 จงแก้สมการ $(D^2 - 5D + 6)y = 6$

วิธีทำ เพราะว่า $D^2 - 5D + 6 = (D - 2)(D - 3)$ เราเขียนสมการโจทย์ได้เป็น

$$(D - 2) [(D - 3)y] = 6$$

$$\text{ให้ } (D - 3)y = z$$

$$\text{จะได้ } (D - 2)z = 6$$

$$\frac{dz}{dx} - 2z = 6$$

$$ze^{-2x} = \int 6e^{-2x} dx$$

$$z = -3 + c_1 e^{2x}$$

$$\text{ดังนั้น } (D - 3)y = -3 + c_1 e^{2x}$$

$$\frac{dy}{dx} - 3y = -3 + c_1 e^{2x}$$

$$ye^{-3x} = \int (-3 + c_1 e^{2x}) e^{-3x} dx$$

$$= e^{-3x} - c_1 e^{-x} + c_2$$

$$\text{คำตอบคือ } y = 1 - c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

หมายเหตุ วิธีการใช้ตัวดำเนินการดิฟเฟอเรนเชียลเชิงเส้น ริเริ่มโดยนักวิศวกรรมไฟฟ้าชาวอังกฤษคือ เฮวีไซด์ (Oliver Heaviside) ซึ่งท่านได้สังเกตความคล้ายคลึงทางพีชคณิตของตัวดำเนินการกับจำนวน เป็นต้นว่า กฎการสลับที่, กฎการเปลี่ยนกลุ่ม, กฎการแจกแจง อนึ่ง ตัวดำเนินการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวคงค่ามีสมบัติที่ตรงกับจำนวนมากขึ้นอีก เช่น การแยกตัวประกอบ คุณสมบัติอื่น ๆ จะได้กล่าวรายละเอียดในหัวข้อ 4.5

จากแนวคิดของเฮวีไซด์ เราอาจพัฒนาคุณสมบัติของตัวดำเนินการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวคงค่าให้กว้างขึ้น เช่น การแยกเศษส่วนย่อยตลอดจนการกระจายเป็นอนุกรมของส่วนกลับ

ของตัวดำเนินการ เพื่อใช้แก้สมการเชิงอนุพันธ์โดยวิธีลด แต่ผู้เขียนเห็นว่า จำเป็นต้องใช้วิธีที่รัดกุม ซึ่งยุ่งยากเกินจำเป็นและอาจใช้วิธีการอื่นแทนได้ จึงมิได้กล่าวในหนังสือเล่มนี้

แบบฝึกหัด 4.4

1. จงหาค่าของ

ก. $(D + 2)D(x^3 - 3x)$

ข. $(D^3 + 20D^2 - D + 5)e^{2x}$

ค. $(D^3 - 2D^2) \sin ax$

2. จงหาผลคูณต่อไปนี้

ก. $(4D + 1)(D - 2)$

ข. $(2D - 3)(2D + 3)$

ค. $(D + 2)(D^2 - 2D + 5)$

ง. $(D - 2)(D + 1)^2$

3. จงแสดงการหาผลคูณต่อไปนี้

ก. $(D - x)(D + x)$

ข. $(D + x)(D - x)$

ค. $(D(xD - 1))$

ง. $(xD - 1)D$

จ. $(xD + 2)(xD - 1)$

ฉ. $(xD - 1)(xD + 2)$

4. จงแก้สมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ ใช้คุณสมบัติ $(L_1 L_2)y = L_1 L_2 y$

ก. $(D - 2)(D + 2)y = 0$

ข. $(D + 1)^5 y = x e^{-x}$

ค. $(D^2 - 9)y = 0$

ง. $y'' - y = e^x$

คำตอบแบบฝึกหัด 4.4

1. ก. $6x^2 + 6x - 6$

ข. $91 e^{2x}$

ค. $-a^3 \cos ax + 2a^2 \sin ax$

2. ก. $4D^2 - 7D - 2$

ข. $4D^2 - 9$

ค. $D^3 + D + 10$

ง. $D^3 - 3D - 2$

3. ก. $D^2 + 1 - x^2$

ข. $D^2 - 1 - x^2$

ค. $x D^2$

ง. $x D^2 - D$

จ. $x^2 D^2 + 2xD - 2$

ฉ. $x^2 D^2 + 2xD - 2$

4. ก. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$

ข. $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 x^4 + \frac{x^6}{6!}) e^{-x}$

ค. $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$

ง. $y = \frac{x}{2} e^x + c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

4.5 คุณสมบัติบางประการของตัวดำเนินการดิฟเฟอเรนเชียล

ในหัวข้อนี้ จะกล่าวถึงคุณสมบัติของตัวดำเนินการดิฟเฟอเรนเชียลเชิงเส้น เฉพาะในบางกรณี ซึ่งคุณสมบัติเหล่านี้ จะอำนวยความสะดวกในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

ทฤษฎีบท 4.5.1 (สูตรของไลบ์นิตซ์ สำหรับการหาอนุพันธ์) สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก

$$D^k(uv) = u^{(k)}v + \binom{k}{1}u^{(k-1)}v' + \binom{k}{2}u^{(k-2)}v'' + \dots + \binom{k}{k}uv^{(k)} \dots\dots\dots (1)$$

พิสูจน์ เราจะใช้หลักการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ บน k

ให้ P(k) แทนข้อความ (1)

จะได้ P(1) คือ $D(uv) = u'v + uv'$ เป็นจริง

และถ้า P(m) เป็นจริง นั่นคือ

$$D^m(uv) = u^{(m)}v + \binom{m}{1}u^{(m-1)}v' + \binom{m}{2}u^{(m-2)}v'' + \dots + \binom{m}{m}uv^{(m)} \text{ จะได้}$$

$$D^{m+1}(uv) = u^{(m+1)}v + u^{(m)}v' + \binom{m}{1}u^{(m)}v' + \binom{m}{1}u^{(m-1)}v'' + \binom{m}{2}u^{(m-1)}v'' + \dots + \binom{m}{m}uv^{(m+1)}$$

$$= u^{(m+1)}v + \binom{m+1}{1}u^{(m)}v' + \binom{m+1}{2}u^{(m-1)}v'' + \dots + \binom{m+1}{m+1}uv^{(m+1)}$$

$$\because \left[\binom{m}{r} + \binom{m}{r+1} \right] = \binom{m+1}{r+1}$$

ดังนั้น P(m+1) จริง เมื่อ P(m) จริง

ดังนั้น โดยหลักการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ P(k) เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก k □

ตัวอย่าง 4.5.1 โดยสูตรของไลบ์นิตซ์

$$D^5(xe^{2x}) = x^{(5)}e^{2x} + \binom{5}{1}x^{(4)}2e^{2x} + \binom{5}{2}x^{(3)}4e^{2x} + \binom{5}{3}x^{(2)}8e^{2x} + \binom{5}{4}x^{(1)}16e^{2x} + \binom{5}{5}x^{(0)}32e^{2x}$$

$$= 0 + 0 + 0 + 0 + 5 \cdot 16e^{2x} + 32xe^{2x}$$

$$= (80+32x)e^{2x}$$

$$\text{และ } D^3(e^{2x} \sin x) = 8e^{2x} \sin x + \binom{3}{1}4e^{2x} \cos x + \binom{3}{2}2e^{2x} (-\sin x) + \binom{3}{3}e^{2x} (-\cos x)$$

$$= e^{2x} (2 \sin x + 11 \cos x)$$

ทฤษฎีบท 4.5.2 (คุณสมบัติเกี่ยวกับฟังก์ชันเอกซโพเนนเชียล)

ให้ $f(D) = a_0D^n + a_1D^{n-1} + \dots + a_{n-1}D + a_n$, $a_i = a_i(x)$ จะได้

$$(1) f(D)e^{mx} = f(m)e^{mx}$$

$$(2) e^{ax} f(D)y = f(D-a)e^{ax} y$$

เรียกคุณสมบัติข้อ (2) ว่า การเลื่อนเอกซโพเนนเชียล หรือ การเลื่อนเอกซโพเนนเชียล ฟังก์ชัน (exponential shift)

พิสูจน์ (1) เพราะทราบว่า

$$\begin{aligned} a_n e^{mx} &= a_n e^{mx} \\ a_{n-1} D e^{mx} &= a_{n-1} m e^{mx} \\ a_{n-2} D^2 e^{mx} &= a_{n-2} m^2 e^{mx} \\ &\dots\dots\dots \\ a_0 D^n e^{mx} &= a_0 m^n e^{mx} \end{aligned}$$

ดังนั้นผลรวม

$$\begin{aligned} f(D)e^{mx} &= (a_0 m^n + \dots a_{n-2} m^2 + a_{n-1} m + a_n) e^{mx} \\ &= f(m) e^{mx} \end{aligned}$$

(2) เรามี

$$e^{ax} y = e^{ax} y \dots\dots\dots (0)$$

เพราะว่า

$$\begin{aligned} (D-a)e^{ax} y &= D e^{ax} y - a e^{ax} y \\ &= e^{ax} D y + a e^{ax} y - a e^{ax} y \\ &= e^{ax} D y \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} (D-a)^2 e^{ax} y &= (D-a)e^{ax} D y \\ &= e^{ax} D(Dy) \\ &= e^{ax} D^2 y \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

และ

$$(D-a)^n e^{ax} y = e^{ax} D^n y \dots\dots\dots (n)$$

จะได้ว่า ถ้าคูณสมการทุกสมการ $(m) : 0 \leq m \leq n$ ด้วย a_{n-m} แล้วรวมกัน

ผลลัพธ์ คือ $f(D-a)e^{ax} y = e^{ax} f(D)y \quad \square$

ตัวอย่าง 4.5.2 โดยคุณสมบัติข้อ (1) ของทฤษฎีบท 4.5.2

$$1. (D^2 - 3)e^{5x} = (5^2 - 3)e^{5x} = 22e^{5x}$$

$$2. (D^3 - 7D^2 + 12D + 1)e^{5x} = (5^3 - 7 \cdot 5^2 + 12 \cdot 5 + 1)e^{5x} = 11e^{5x}$$

$$3. (D-1)(D-3)e^x = (1-1)(1-3)e^x = 0$$

ตัวอย่าง 4.5.3 โดยคุณสมบัติ $e^{ax} f(D)y = f(D-a)e^{ax} y$

$$(1) e^{2x} (D-1)y = (D-3)e^{2x} y$$

$$(2) e^{2x} (D^2-1)y = [(D-2)^2-1]e^{2x} y = (D^2-4D+3)e^{2x} y$$

$$(3) e^x (D-3)^7 y = (D-4)^7 e^x y$$

ตัวอย่าง 4.5.4 ให้ $g(D) = f(D-a)$ จะได้ $g(D+a) = f(D-a+a) = f(D)$

ดังนั้น $e^{ax} g(D+a)y = g(D)e^{ax} y$ และจะได้

$$1) g(D)e^x y = e^x g(D+1)y$$

$$2) g(D)e^{-6x} y = e^{-6x} g(D-6)y$$

$$3) (D^2-4D+4)e^{2x} y = e^{2x} [(D+2)^2-4(D+2)+4]y \\ = e^{2x} D^2 y$$

$$4) f(D)e^{3x} y = e^{3x} f((D+3))y \\ = e^{3x} f(D^2+6D+9)y$$

$$5) (D^2-D-1)x e^{-x} = e^{-x} (D^2-3D+1)x \\ = e^{-x} (2-6x+x^2)$$

$$6) (D-1)e^x \sin x = e^x D \sin x \\ = e^x \cos x$$

$$7) e^{2x} (D^2-D+1)e^{3x} y = e^{5x} (D^2+5D+7)y \\ = [(D-2)^2-(D-2)+1]e^{5x} y$$

$$8) (D-3)^5 e^{3x} \sin x = e^{3x} D^5 \sin x \\ = e^{3x} \cos x$$

ตัวอย่าง 4.5.5 จงแก้สมการเชิงอนุพันธ์

$$ก. (D+3)^4 y = 0$$

$$ข. (2D-1)^2 y = 0$$

วิธีทำ

$$ก. นำ e^{3x} คูณสมการทั้งสองข้างได้ $e^{3x} (D+3)^4 y = 0$$$

$$D(e^{3x} y) = 0 \dots\dots\dots \text{การเลื่อนเอกซโพเนนเชียล}$$

$$e^{3x} y = c_1 + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4$$

$$\text{หรือ } y = (c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3)e^{-3x}$$

$$\text{ข. จัดสมการได้เป็น } (D - \frac{1}{2})^2 y = 0$$

$$\text{ดังนั้น } e^{-\frac{1}{2}x} (D - \frac{1}{2})^2 y = 0$$

$$D^2 (e^{-\frac{1}{2}x} y) = 0$$

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{\frac{1}{2}x}$$

ข้อสังเกต การคูณสมการ ต้องคูณข้างหน้า ถ้าคูณข้างหลังจะผิดความหมาย เช่น

$$e^{3x} (D + 3)^4 y \neq (D + 3)^4 e^{3x} y \text{ เพราะพจน์ซ้ายคือ ผลคูณของ } e^{3x}$$

$$\text{กับ } (D + 3)^4 y \text{ ซึ่งเท่ากับ } D^4 e^{3x} y \text{ แต่พจน์ขวาได้ } (D + 3)^4 e^{3x} y$$

แบบฝึกหัด 4.5 จงแก้สมการ โดยใช้การเลื่อนเอกซโพเนนเชียล

$$1. (D - 2)^3 y = 0$$

$$2. (2D + 1)^2 y = 0$$

$$3. (D + 2)^3 y = xe^{-2x}$$

คำตอบแบบฝึกหัด 4.5

$$1. y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{2x}$$

$$2. y = (c_1 + c_2x)e^{-x/2}$$

$$3. y = e^{-2x} \left(\frac{x^4}{24} + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 \right)$$

4.6 คำตอบของสมการเอกพันธ์

ในวิชาพีชคณิตเชิงเส้น มีทฤษฎีบทเกี่ยวกับฐานของปริภูมิเวกเตอร์ กล่าวว่า “ สำหรับปริภูมิเวกเตอร์ มิติ n จะได้ว่าเวกเตอร์ที่เป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น n เวกเตอร์ใด ๆ จะเข้าชุดเป็นฐานของปริภูมินั้นได้ ” อนึ่งเราทราบว่า สมการเอกพันธ์ อันดับ n จะมีเซตคำตอบเป็นปริภูมิเวกเตอร์ เรียกปริภูมิคำตอบ (solution space) ถ้าเราพิสูจน์ได้ว่าปริภูมิคำตอบนี้มีมิติ n จะสามารถสร้างฐานของปริภูมิคำตอบ จากคำตอบที่เป็นฟังก์ชันอิสระต่อกันเชิงเส้น n ฟังก์ชัน และจะสามารถเขียนคำตอบทั่ว ๆ ไปในรูปผลรวมเชิงเส้นของฐานนี้

ทฤษฎีบท 4.6.1 (Dimensionality Theorem)

$$\text{ถ้า } L = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n, a_0 \neq 0$$

จะได้ปริภูมิคำตอบของสมการ $Ly = 0$ มีมิติ n

พิสูจน์ ให้ I เป็นช่วงซึ่งทุก a_i เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ในช่วงนี้ และ $x_0 \in I$

โดยทฤษฎีบท 4.1.1 จะมีคำตอบ $y_1(x), \dots, y_n(x)$ ของสมการนี้สอดคล้องกับเงื่อนไขต้น

$$y_1(x_0) = 1, y_1'(x_0) = 0, \dots, y_1^{(n-1)}(x_0) = 0$$

$$y_2(x_0) = 0, y_2'(x_0) = 1, \dots, y_2^{(n-1)}(x_0) = 0$$

..... (ก)

$$y_n(x_0) = 0, y_n'(x_0) = 0, \dots, y_n^{(n-1)}(x_0) = 1$$

เราอ้างว่า $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ นี้เป็นฐาน พิสูจน์ได้ดังนี้

(1) ค่า วรอนสเกียนของทั้ง n ฟังก์ชันในฐาน ณ x_0 คือ

$$w(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

ดังนั้น $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ เป็นอิสระเชิงเส้น

(2) ให้ $y = y^*(x)$ เป็นคำตอบของสมการเอกพันธ์ $Ly = 0$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข

$$y(x_0) = a'_0, y'(x_0) = a'_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = a'_{n-1} \dots \dots \dots (ข)$$

แต่ $y(x) = a'_0 y_1(x) + a'_2 y_2(x) + \dots + (a'_{n-1} y_n(x)$ เป็นคำตอบของ $Ly = 0$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข (ข) เช่นกัน (ตรวจสอบจาก (ก)) โดยทฤษฎีบท 4.1.1 ซึ่งได้กล่าวถึงการมีคำตอบหนึ่งเดียว จะได้ $y^*(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x) + \dots + a_{n-1} y_n(x)$

ดังนั้น $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ แผ่ทั่วปริภูมิ (span the space) ของคำตอบของ $Ly = 0$ จาก (1) และ (2) เราได้ว่าปริภูมิคำตอบของสมการ $Ly = 0$ มีมิติ n

ต่อไปนี้จะศึกษาการสร้างฐานของปริภูมิคำตอบ $Ly = 0$ ซึ่ง L มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวคงค่า ซึ่งจะใช้ความรู้ว่า ถ้า $L_1 L_2$ มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวคงค่าจะได้ $L_1 L_2 = (L_1 L_2) = (L_2 L_1) = L_2 L_1$ (ตรวจสอบจากข้อ (3) ทฤษฎีบท 4.4.2)

ทฤษฎีบท 4.6.2 ถ้า L เป็นผลคูณของตัวดำเนินการ ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นตัวคงค่า

$$L = L_1 L_2 \dots L_k$$

จะได้คำตอบ $L_i y = 0$, $i = 1, 2, \dots, k$, จะเป็นคำตอบของ $Ly = 0$

พิสูจน์ ถ้า $L_1 u = 0$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } Lu &= (L_1 L_2 \dots L_k)u \\ &= (L_1 L_2 \dots L_{i-1} L_{i+1} \dots L_k) L_1 u \\ &= (L_1 L_2 \dots L_{i-1} L_{i+1} \dots L_k) 0 \\ &= 0 \quad \square \end{aligned}$$

บทนิยาม 4.6.1 ถ้า $Lu = 0$ เรากล่าวว่าตัวดำเนินการ L ลบล้าง (annihilate) u

หรือ L เป็นตัวลบล้าง (annihilator) ของ u

ทฤษฎี 4.6.2 กล่าวว่า ถ้า L_i เป็นตัวลบล้างของ u จะได้ L เป็นตัวลบล้างของ u ด้วย

จากทฤษฎีบท 4.6.2 เราได้แนวคิดที่ว่า ถ้าสามารถเขียนตัวดำเนินการดิฟเฟอเรนเชียลเชิงเส้น อันดับ n ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นตัวคงค่า $L = L_1 L_2 \dots L_n$ ได้ $L_i = D - r_i$ เป็นตัวประกอบ ซึ่งมีอันดับ 1 และ หาคำตอบของ $(D - r_i) y = 0$ ได้ง่าย เราหวังว่าจะได้ฐานจากคำตอบเหล่านี้ ปัญหาคือ เราจะแยกตัวประกอบของ L ได้อย่างไร โดยเฉพาะกรณีที่ L มีอันดับสูง ๆ ทางแก้ปัญหานี้คือ ถ้า $L = f(D)$ เป็นพหุนามใน D ตัวประกอบของ L จะมีผลคูณแบบการคูณพหุนามเป็น L ดังนั้นเราจะอาศัยความรู้เรื่องพหุนาม ในการแยกตัวประกอบของ L การแยกตัวประกอบของ $f(D)$ โดยทั่วไป อาจหาได้จากกราฟของสมการ $f(m) = 0$ เนื่องจาก D เป็นตัวดำเนินการ มิใช่จำนวน จึงไม่มีรากเป็นค่าของ D การแยกตัวประกอบของ $f(D)$ จึงทำได้โดยเทียบกับรูปตัวประกอบของ $f(m)$

บทนิยาม 4.6.2 ถ้ากำหนดตัวดำเนินการ $L = f(D)$ เรียก $f(m) = 0$ ว่าสมการช่วย (auxiliary equation หรือ characteristic equation) ของ $f(D)$

ตัวอย่าง 4.6.1 ถ้า $f(D) = D^3 - 4D^2 + D + 6$

$$\text{สมการช่วยคือ } f(m) = m^3 - 4m^2 + m + 6 = 0$$

มีราก $-1, 2, 3$

$$\text{ดังนั้น } f(m) = (m + 1)(m - 2)(m - 3)$$

$$\text{และ } f(D) = (D + 1)(D - 2)(D - 3)$$

ต่อไปนี้จะกล่าวถึงการแก้สมการเอกพันธ์ โดยอาศัยสมการช่วย ซึ่งเราจะพยายามหาฐานของปริภูมิคำตอบจากข้อมูลข้างต้น และกำหนดคำตอบทั่วไปในรูป ผลรวมเชิงเส้นของฐานการแก้สมการเอกพันธ์ โดยอาศัยสมการช่วย

กรณี 1 รากเป็นจำนวนจริงแตกต่างกัน

ตัวอย่าง 4.6.2 จงหาฐานของปริภูมิ คำตอบ และคำตอบทั่วไปของสมการ

$$y''' - 7y' + 6y = 0$$

วิธีทำ เขียนสมการโฮมogeneous ได้เป็น

$$(D^3 - 7D + 6)y = 0$$

$$\text{สมการช่วย คือ } m^3 - 7m + 6 = 0$$

$$(m-1)(m^2 + m - 6) = 0 \quad \because 1 \text{ เป็นรากของสมการ}$$

$$(m-1)(m-2)(m+3) = 0$$

$$\text{ดังนั้น เขียนสมการได้เป็น } (D-1)(D-2)(D+3)y = 0$$

$$\text{คำตอบของ } (D-1)y = 0 \text{ หรือ } \frac{dy}{dx} - y = 0 \text{ ได้แก่ } y = e^x$$

$$\text{คำตอบของ } (D-2)y = 0 \text{ หรือ } \frac{dy}{dx} - 2y = 0 \text{ ได้แก่ } y = e^{2x}$$

$$\text{คำตอบของ } (D+3)y = 0 \text{ หรือ } \frac{dy}{dx} + 3y = 0 \text{ ได้แก่ } y = e^{-3x}$$

$$\text{ดังนั้น } e^x, e^{2x}, e^{-3x} \text{ เป็นคำตอบของสมการ } (D^3 - 7D + 6)y = 0 \text{ ด้วยตามทฤษฎี-}$$

บท 4.6.2

อนึ่ง e^x, e^{2x}, e^{-3x} เป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น ตามตัวอย่าง 4.3.4 และปริภูมิ คำตอบของสมการนี้มีมิติ 3 ดังนั้น $\{e^x, e^{2x}, e^{-3x}\}$ เป็นฐาน

$$\text{คำตอบทั่วไปคือ } y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-3x}$$

ข้อสังเกต 1. ถ้า $L = a_0(D-r_1)(D-r_2)\dots(D-r_n)$ ซึ่ง $r_i \neq r_j$ เมื่อ $i \neq j$ และ $a_0 \neq 0$ จะได้คำตอบของ $Ly = 0$ คือ $y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x}$

2. ถ้า $r_1, r_2, \dots, r_n$ เป็นรากของสมการช่วย เราอาจได้ฐานจากรากของสมการช่วยโดยสร้างฟังก์ชัน เอกซ์โพเนนเชียลในรูป $e^{r_i x}$ เป็นคำตอบที่เป็นสมาชิกของฐาน และจะได้คำตอบทั่วไปทันที ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.6.3 จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้

$$1. (D^2 + 2D - 3)y = 0$$

$$2. (D^2 + 2D)y = 0$$

$$3. (D^3 + 3D^2 - 4D)y = 0$$

$$4. y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$$

$$5. \frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} = 0$$

$$6. \frac{d^2y}{dx^2} - (a+b)\frac{dy}{dx} + aby = 0, a \neq b$$

วิธีทำ 1. สมการช่วย คือ $m^2 + 2m - 3 = 0$ ราก 1, -3

$$\text{คำตอบทั่วไปคือ } y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$$

$$2. \text{รากของสมการช่วย คือ } 0, -2 \text{ คำตอบทั่วไป } y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-2x}$$

$$\text{หรือ } y = c_1 + c_2 e^{-2x}$$

$$3. \text{รากของสมการช่วย คือ } 0, 1, -4 \text{ คำตอบทั่วไป } y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-4x}$$

$$4. \text{สมการช่วย คือ } m^3 + 6m^2 + 11m + 6 = 0$$

$$(m+1)(m^2 + 5m + 6) = 0$$

$$(m+1)(m+2)(m+3) = 0$$

รากของสมการช่วย -1, -2, -3

$$\text{และคำตอบทั่วไป } y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{-3x}$$

$$5. \text{สมการช่วย คือ } m^3 + m^2 - 2m = 0 \text{ ราก } 0, 1, -2$$

$$\text{คำตอบทั่วไป } x = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-2t}$$

$$6. \text{สมการช่วยคือ } m^2 - (a+b)m + ab = 0$$

$$\text{หรือ } (m-a)(m-b) = 0 \text{ ราก } a, b$$

$$\text{คำตอบทั่วไป } y = c_1 e^{ax} + c_2 e^{bx}$$

กรณี 2 รากเป็นจำนวนจริง มีรากซ้ำ

ทฤษฎีบท 4.6.3 ฟังก์ชัน $u_1(x) = e^{rx}$,

$$u_2(x) = x e^{rx},$$

.....

$$u_m(x) = x^{m-1} e^{rx}$$

เป็นอิสระเชิงเส้น และมี $(D-r)^m$ เป็นตัวลบ

พิสูจน์ โดยตัวอย่าง 4.3.4 $e^{rx}, xe^{rx}, \dots, x^{m-1}e^{rx}$ เป็นอิสระเชิงเส้น

ให้ k เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $0 \leq k \leq m-1$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } (D-r)^m x^k e^{rx} &= e^{rx} (D+r-r)^m x^k \quad (\text{การเลื่อนเอกซโพเนนเชียล}) \\ &= e^{rx} D^m x^k \\ &= e^{rx} 0 \quad \because 0 \leq k \leq m-1 \\ &= 0 \quad \square \end{aligned}$$

จากทฤษฎีบทนี้ จะได้ว่า $\{e^{rx}, xe^{rx}, \dots, x^{m-1}e^{rx}\}$ เป็นฐานของปริภูมิคำตอบของ $(D-r)^m y = 0$ หนึ่ง ถ้า $L = f(D)(D-r)^m$ ซึ่ง $f(D)$ ไม่มีตัวประกอบ $(D-r)$ เราจะได้ฐานของปริภูมิคำตอบของ $Ly = 0$ ซึ่งมี $e^{rx}, xe^{rx}, \dots, x^{m-1}e^{rx}$ เป็นส่วนประกอบด้วย

ตัวอย่าง 4.6.4 จงหาคำตอบทั่วไปของสมการต่อไปนี้

1. $(D-b)^4 y = 0$
2. $(D-a)(D-b)^2 y = 0$
3. $(D-1)^2 (D-5)^3 y = 0$
4. $(D^3 - D^2 - 8D + 12)y = 0$
5. $(D^5 - 4D^3)y = 0$

วิธีทำ 1. รากของสมการช่วย คือ b, b, b, b

ฐานของปริภูมิคำตอบได้แก่ $\{e^{bx}, xe^{bx}, x^2 e^{bx}, x^3 e^{bx}\}$

$$\begin{aligned} \text{คำตอบทั่วไป } y &= c_1 e^{bx} + c_2 x e^{bx} + c_3 x^2 e^{bx} + c_4 x^3 e^{bx} \\ &= (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3) e^{bx} \end{aligned}$$

2. รากของสมการช่วย a, b, b

ฐานของปริภูมิคำตอบได้แก่ e^{ax}, e^{bx}, xe^{bx}

$$\text{คำตอบทั่วไป } y = c_1 e^{ax} + (c_2 + c_3 x) e^{bx}$$

3. รากของสมการช่วย $1, 1, 5, 5, 5$

$$\text{คำตอบทั่วไป } y = (c_1 + c_2 x) e^x + (c_3 + c_4 x + c_5 x^2) e^{5x}$$

4. สมการช่วยคือ $m^3 - m^2 - 8m + 12 = 0$

$$(m-2)(m^2 + m - 6) = 0 \quad \because 2 \text{ เป็นราก}$$

$$(m-2)(m+3) = 0$$

รากของสมการช่วย $2, 2, -3$

$$\text{คำตอบทั่วไป } y = (c_1 + c_2x)e^{2x} + c_3e^{-3x}$$

$$5. \text{ สมการช่วย คือ } m^5 - 4m^3 = 0$$

$$m^3(m+2)(m-2) = 0$$

รากของสมการช่วย $0, 0, 0, -2, 2$

$$\begin{aligned} \text{คำตอบทั่วไป } y &= (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{0x} + c_4e^{-2x} + c_5e^{2x} \\ &= c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-2x} + c_5e^{2x} \end{aligned}$$

ข้อสังเกต ในข้อ 4 เราใช้ทฤษฎีตัวประกอบ (Factor Theorem) ซึ่งกล่าวว่า ถ้า a เป็นรากของสมการ $f(x) = 0$ จะได้ $f(x) = (x - a)Q(x)$ ในการหา $Q(x)$ เราอาจเขียนรูป $Q(x)$ คร่าว ๆ แล้วใช้วิธีเทียบสัมประสิทธิ์เพื่อหารูปสมบูรณ์ของ $Q(x)$ ตามข้อ 4 เราทราบว่า 2 เป็นราก ดังนั้น

$$m^3 - m^2 - 8m + 12 = (m - 2)(m^2 + \dots m + \dots)$$

$m^2 + \dots m + \dots$ เป็นรูปคร่าว ๆ ของอีกตัวประกอบหนึ่ง เราพิจารณาต่อไปว่าพจน์

$-m^2$ ทางซ้ายมือต้องเกิดจากผลรวมของผลคูณคู่ที่โยงกันเท่านั้น ทางขวามือคู่ที่เราทราบผลคูณ ได้ผลคูณ $-2m^2$ ดังนั้น สัมประสิทธิ์ หน้า m ต้องเป็น 1 (เพื่อผลรวมจะได้เป็น $-m^2$)

$$\text{ดังนั้น } m^3 - m^2 - 8m + 12 = (m - 2)(m^2 + m + \dots)$$

อนึ่ง พจน์ 12 ทางซ้ายมือเกิดจากผลคูณของท้ายวงเล็บเท่านั้น เทอมที่เหลือจึงเป็น -6

$$\text{ดังนั้น } m^3 - m^2 - 8m + 12 = (m - 2)(m^2 + m - 6)$$

เพื่อตรวจสอบว่า แยกตัวประกอบถูกต้อง เราอาจตรวจสอบพจน์ $-8m$ ซึ่งควรเกิดจาก $m(-6) + (-2)m$ (ลองเขียนเส้นโยง) ปรากฏว่า ถูกต้อง

ตัวอย่าง 4.6.5 จงหาคำตอบของสมการ $(D^4 - 7D^3 + 18D^2 - 20D + 8)y = 0$

$$\text{สมการช่วย } m^4 - 7m^3 + 18m^2 - 20m + 8 = 0$$

$$(m - 1)(m^3 - 6m^2 + 12m - 8) = 0 \quad \because 1 \text{ เป็นราก}$$

$$(m - 1)(m - 2)(m^2 - 4m + 4) = 0 \quad \because 2 \text{ เป็นราก}$$

$$(m - 1)(m - 2)^3 = 0$$

ดังนั้น รากสมการช่วย $1, 2, 2, 2$

$$\text{คำตอบทั่วไป } y = c_1 e^x + (c_2 + c_3 x + c_4 x^2) e^{2x}$$

กรณี 3 รากเป็นจำนวนเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อนทุกจำนวน สามารถเขียนแสดงในรูป $a + bi$, a, b เป็นจำนวนจริง และ

$$i = (0,1) \text{ มีสมบัติว่า } i^2 = -1$$

อภิปราย 1 ถ้า $z = a + bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน เรานิยามสังยุคของ z คือ

$$\bar{z} = a - bi \text{ สังยุคของจำนวนเชิงซ้อนมีคุณสมบัติ}$$

$$\text{ก. } \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\text{ข. } \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$\text{ค. } \overline{(\bar{z})} = z$$

$$\text{ง. } \bar{a} = a \text{ ก็ต่อเมื่อ } a \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

มีข้อเท็จจริงที่น่าสนใจประการหนึ่งของสังยุคกล่าวคือ ถ้า z เป็นรากของสมการพหุนาม $f(x) = 0$ ซึ่งสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง จะได้ $\bar{z}$ เป็นรากของสมการนี้ด้วย แสดงได้ดังนี้

$$\text{เราทราบว่า } f(z) = 0 \text{ เป็นจริง}$$

$$\text{ดังนั้น } \overline{f(z)} = \bar{0}$$

เนื่องจากคุณสมบัติข้อ ก.ข.ค. และ ง. ของสังยุคจะได้สมการดังกล่าวนี้คือ

$$f(\bar{z}) = 0$$

ข้อสังเกต จากข้ออภิปราย 1 นี้ สมการพหุนาม $f(x) = 0$ ซึ่งสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง

ดีกรีจำนวนคี่จะมีรากเป็นจำนวนจริงอย่างน้อย 1 ราก

2 ถ้า $z = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ใช้กฎการยกกำลังของจำนวนจริงจะได้

$$e^z = e^\alpha \cdot e^{i\beta}$$

$$\begin{aligned} \text{แต่ } e^{i\beta} &= 1 + i\beta - \frac{\beta^2}{2!} - \frac{i\beta^3}{3!} + \frac{\beta^4}{4!} + \frac{i\beta^5}{5!} - \frac{\beta^6}{6!} - \frac{i\beta^7}{7!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!} - \frac{\beta^6}{6!} + \dots\right) + i\left(\beta - \frac{\beta^3}{3!} + \frac{\beta^5}{5!} - \frac{\beta^7}{7!} + \dots\right) \\ &= \cos \beta + i \sin \beta \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } e^z = e^\alpha (\cos \beta + i \sin \beta)$$

เนื่องจาก $\alpha + i\beta$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งระบบจำนวนเชิงซ้อนเป็นผลการขยายระบบจำนวนจริง กฎเกณฑ์ของจำนวนจริงเมื่อจะนำไปใช้ในระบบจำนวนเชิงซ้อน ต้องไม่ทำให้เกิดการขัดแย้ง* (contradiction) และกฎเกณฑ์พื้นฐานเราใช้ในฐานะนิยาม เพราะไม่สามารถพิสูจน์ได้ แต่เนื่องจากกฎเกณฑ์ดังกล่าวไม่ทำให้เกิดการขัดแย้ง เราจึงนิยาม

บทนิยาม 4.6.3 $e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha}(\cos \beta + i \sin \beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

ข้อสังเกต จากบทนิยามนี้

$$\begin{aligned} \text{ก. } e^{\alpha - i\beta} &= e^{\alpha + i(-\beta)} \\ &= e^{\alpha}(\cos(-\beta) + i \sin(-\beta)) \\ &= e^{\alpha}(\cos \beta - i \sin \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ข. } e^{(a+ib)x} &= e^{ax + i(bx)} \\ &= e^{ax}(\cos bx + i \sin bx) \end{aligned}$$

$$\text{ค. } e^{ibx} = e^{0+ibx} = \cos bx + i \sin bx$$

ในกรณีที่สมการช่วยมีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อน $\alpha + i\beta$ จะได้ค่า $\alpha - i\beta$ เป็นรากของสมการช่วยเช่นกัน รากทั้งสองจะมาจากตัวประกอบ

$$L_1 = (D - (\alpha + i\beta))(D - (\alpha - i\beta)) = D^2 - 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2$$

ของ L กรณีเฉพาะที่ $L = L_1$ จะได้คำตอบของสมการ $L_1 y = 0$ คือ

$$y = c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)x} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\begin{aligned} &= c_1 e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) + c_2 e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x) \\ &= e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \quad \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

$$\text{เมื่อ } C_1 = c_1 + c_2 \text{ และ } C_2 = i(c_1 - c_2)$$

เราไม่นิยมเขียนคำตอบในรูป (1) แต่มักเขียนในรูป (2) เพราะการคำนวณค่าฟังก์ชันจำนวนเชิงซ้อน เราคำนวณได้จากส่วนจริงและส่วนจินตภาพ ซึ่งเป็นฟังก์ชันจำนวนจริง

ในกรณีที่สมการช่วยมีรากที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนซ้ำกัน เช่น

$$c + i\beta, a + i\beta, a + i\beta \quad \text{จะมีรากสังยุค } \alpha - i\beta, \alpha - i\beta, \alpha - i\beta$$

* ไม่จำเป็นที่ทุกกฎเกณฑ์ของจำนวนจริง จะใช้ได้กับระบบจำนวนเชิงซ้อน เช่น

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad \text{เมื่อทั้งสามจำนวนเป็นจำนวนจริง}$$

ใช้กับจำนวนเชิงซ้อนไม่ได้ เพราะจะพิสูจน์ได้ว่า

$$-1 = \sqrt{-1} \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

ให้ $L_2 = [D^2 - 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2]^3$ จะได้คำตอบของ $L_2 y = 0$ คือ

$$\begin{aligned} y &= (b_1 + b_2 x + b_3 x^2) e^{(\alpha + i\beta)x} + (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{(\alpha - i\beta)x} \\ &= (b_1 + b_2 x + b_3 x^2) e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) \\ &\quad + (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x) \\ &= e^{\alpha x} [(A_1 + A_2 x + A_3 x^2) \cos \beta x + (B_1 + B_2 x + B_3 x^2) \sin \beta x] \end{aligned}$$

เมื่อ $A_j = b_j + c_j$ และ $B_j = i(b_j - c_j)$, $j = 1, 2, 3$

ตัวอย่าง 4.6.6 จงแก้สมการ $(D^3 - 3D^2 + 9D + 13)y = 0$

วิธีทำ สมการช่วยคือ $m^3 - 3m^2 + 9m + 13 = 0$

$$(m+1)(m^2 - 4m + 13) = 0 \quad \because -1 \text{ เป็นราก}$$

$$\text{รากสมการช่วย } -1, \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2}$$

$$\text{หรือ } -1, 2 \pm 3i$$

$$\text{คำตอบทั่วไป } y = c_1 e^{-x} + e^{2x} (c_2 \cos 3x + c_3 \sin 3x)$$

ตัวอย่าง 4.6.7 จงแก้สมการ $(D^4 + 8D^2 + 16)y = 0$

วิธีทำ สมการช่วย คือ $m^4 + 8m^2 + 16 = 0$

$$(m^2 + 4)^2 = 0$$

$$\text{รากสมการช่วย } \pm 2i, \pm 2i$$

$$\text{คำตอบทั่วไป } y = e^{0x} [(c_1 + c_2 x) \cos 2x + (c_3 + c_4 x) \sin 2x]$$

$$\text{หรือ } y = (c_1 + c_2 x) \cos 2x + (c_3 + c_4 x) \sin 2x$$

ตัวอย่าง 4.6.8 จงแก้สมการ $y^{(5)} - 9y^{(4)} + 34y''' - 66y'' + 65y' - 25y = 0$

วิธีทำ สมการช่วย คือ $m^5 - 9m^4 + 34m^3 - 66m^2 + 65m - 25 = 0$

$$(m-1)(m^4 - 8m^3 + 26m^2 - 40m + 25) = 0 \quad \because 1 \text{ เป็นราก}$$

$$(m-1)(m^2 - 4m + 5)^2 = 0$$

$$\text{รากสมการช่วย } 1, \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2}, \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2}$$

$$\text{หรือ } 1, 2 \pm i, 2 \pm i$$

$$\text{คำตอบทั่วไป } y = c_1 e^x + e^{2x} [(c_2 + c_3 x) \cos x + (c_4 + c_5 x) \sin x]$$

หมายเหตุ ในสมการ $m^4 - 8m^3 + 26m^2 - 40m + 25 = 0$ ลองแทน m ด้วย 1, 5, 25 ผลไม่เป็น 0

(จากการแทน m ด้วย -1 จะเห็นว่าทุกพจน์เป็นบวก ไม่จำเป็นต้องตรวจสอบการแทน m ด้วย -5, -25) สมการนี้จะไม่มียากเป็นจำนวนตรรกยะ เราจึงสมมติ

$$m^4 - 8m^3 + 26m^2 - 40m + 25 = (m^2 + Am + B)(m^2 + Cm + E)$$

$$\text{ได้สมการ } A+C = -8$$

$$B+AC+E = 26$$

$$BC+AE = -40$$

$$BE = 25$$

จากนั้นลองสมมติ B, E เป็นจำนวนเต็ม ซึ่งคูณกันได้ 25 เช่น $B = E = 5$,
 $B = E = -5, E = 1, B = -25, E = -1$ คำที่ใช้ได้คือ $B = E = 5$ และได้ $A = C = -4$ *

แบบฝึกหัด 4.6 จงแก้สมการเอกพันธ์ต่อไปนี้

$$1. (D^2 - 2D + 3)y = 0$$

$$2. (D^2 + 2D)y = 0$$

$$3. (D^3 + 3D^2 - 4D)y = 0$$

$$4. y'''' + 6y''' + 11y'' + 6y' = 0$$

$$5. \frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{2dx}{dt} = 0$$

$$6. (D^3 - D^2 - 8D + 12)y = 0$$

$$7. (D^4 + 2D^3 + D^2)y = 0$$

$$8. (D^4 - 7D^3 + 18D^2 - 20D + 8)y = 0$$

$$9. (D^5 - 4D^3)y = 0$$

$$10. D^2(D-1)y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 3, y''(0) = 2$$

$$11. (D^2 - 2D + 5)y = 0$$

$$12. (D^2 + 9)y = 0$$

$$13. (D^4 - 2D^3 - 11D^2 + 52D)y = 0$$

$$14. y^{(4)} + 16y = 0$$

คำตอบแบบฝึกหัด 4.6

$$1. y = e^x (c_1 \cos \sqrt{2}x + c_2 \sin \sqrt{2}x)$$

$$2. y = c_1 + c_2 e^{-2x}$$

$$3. y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-4x}$$

$$4. y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{-3x}$$

* ในกรณีอื่นที่ทำเช่นนี้แล้วไม่ได้ผลดู Introduction to Complex Variable ของ Grove and Ladas, 1974 หน้า 30, 31, 29

$$5. x = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-3t}$$

$$6. y = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + c_3 e^{-3x}$$

$$7. y = c_1 + c_2 x + (c_3 + c_4 x)e^{-x}$$

$$8. y = c_1 e^x + (c_2 + c_3 x + c_4 x^2)e^{2x}$$

$$9. y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{2x} + c_5 e^{-2x}$$

$$10. y = x + 2e^x$$

$$11. y = e^x (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

$$12. y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$$

$$13. y = c_1 + c_2 e^{-4x} + e^{3x} (c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x)$$

$$14. y = e^{\sqrt{2}x} (c_1 \cos \sqrt{2}x + c_2 \sin \sqrt{2}x) + e^{-2x} (c_3 \cos \sqrt{2}x + c_4 \sin \sqrt{2}x)$$

4.7 คำตอบของสมการเชิงเส้นโดยทั่วไป

4.7.1 ตัวดำเนินการดิฟเฟอเรนเชียลเชิงเส้นในฐานะการแปลงเชิงเส้น

ตัวดำเนินการดิฟเฟอเรนเชียลเชิงเส้น

$$L = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n, a_0 \neq 0$$

เป็นการแปลงจากปริภูมิเวกเตอร์

$$\mathcal{C}^n(J) = \{ y \mid y \text{ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ต่อเนื่องถึงอันดับที่ } n \text{ บนช่วง } J \}$$

ไปบนปริภูมิเวกเตอร์ $\mathcal{C}(J) =$ เซตของฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วง J เดียวกัน

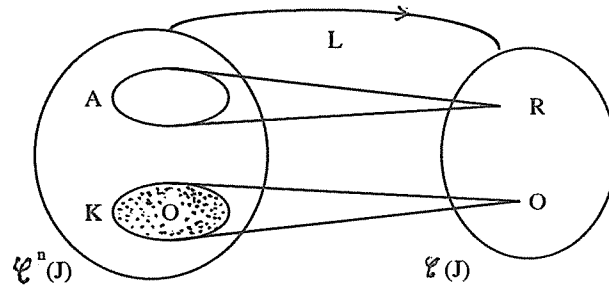
ดังนั้น สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งเขียนในรูป

$$Ly = R(x) \quad \dots \dots \dots (1)$$

ปริภูมิคำตอบของสมการนี้ ประกอบด้วยฟังก์ชัน y ซึ่ง

$$Ly = R(x)$$

บทนิยาม 4.7.1 ถ้า $R \neq 0$ เรียก $Ly = R$ ว่าสมการมิใช่เอกพันธ์ (nonhomogeneous) และเรียก $Ly = 0$ ว่า สมการเอกพันธ์ที่เกี่ยวข้อง (associated homogeneous equation)



ตามรูป K เป็นเซตของคำตอบสมการเอกพันธ์ $Ly = 0$ (เรียก K ว่า Null space)

A เป็นเซตของคำตอบของสมการ $Ly = R$

จงสังเกตว่า A กับ K ไม่มีส่วนซ้ำกัน นอกจากนี้ยังมีสมบัติที่น่าสนใจเกี่ยวกับการกำหนดรูปคำตอบของสมการ $Ly = R$ ด้วย ตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.7.1 ก. ถ้า y_1 เป็นคำตอบของสมการ $Ly = R$ และ y_2 เป็นคำตอบของสมการ

$$Ly = 0 \text{ จะได้ } y = y_1 + y_2 \text{ เป็นคำตอบของสมการ } Ly = R$$

ข. ถ้า y เป็นคำตอบใด ๆ ของสมการ $Ly = R$ และ y_p เป็นคำตอบเฉพาะของสมการ $Ly = R$ จะได้ $y - y_p$ เป็นคำตอบของ $Ly = 0$

พิสูจน์ ก. เราได้ว่า $Ly_1 = R$ และ $Ly_2 = 0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} L(y_1 + y_2) &= Ly_1 + Ly_2 \quad (L \text{ เป็นการแปลงเชิงเส้น}) \\ &= R + 0 \\ &= R \end{aligned}$$

ดังนั้น $y = y_1 + y_2$ เป็นคำตอบของสมการ $Ly = R$

ข. เราได้ว่า $Ly = R$ และ $Ly_p = R$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} L(y - y_p) &= L(y + (-1)y_p) \\ &= Ly + (-1)Ly_p \\ &= R - R \\ &= 0 \quad \square \end{aligned}$$

ข้อสังเกต (1) เนื่องจากปริภูมิเวกเตอร์เป็นกรุป เราเปลี่ยนภาษาทฤษฎีบท 4.7.1 ในแง่กรุปย่อยและโคเซตได้ดังนี้ (สำหรับข้อ ก เปลี่ยน y_1 เป็น y_p) ให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $Ly = R$

ก. ถ้า $y_p \in A$, $y_2 \in K$ จะได้ $y_p + y_2 \in A$ (ดังนั้นโคเซต $y_p + K \subset A$)

ข. ถ้า $y \in A$ กำหนด $y_p \in A$ จะได้ $y - y_p \in K$ ดังนั้น $y \in y_p + K$

(หรือ $A \subset y_p + K$)

ดังนั้น จาก ก. และ ข. $A = y_p + K$

ดังนั้น สมาชิกของ A อยู่ในรูป

$$y = y_p + y_c, \quad y_c \in K$$

นั่นคือ รูปคำตอบทั่วไปของสมการ $Ly = R$ อยู่ในรูป

$$y = y_c + y_p$$

โดย y_c เรียกฟังก์ชันเติมเต็ม (complementary function) เป็นคำตอบทั่วไปของ

$$\text{สมการ } Ly = 0$$

y_p เรียกคำตอบเฉพาะ เป็นคำตอบเฉพาะของ $Ly = R$

4.7.2 การแก้สมการโดยวิธีใช้ตัวลบล้าง (Annihilator Method)

กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์ $Ly = R$ จุดสำคัญของวิธีนี้คือพิจารณา R เพื่อหาตัวดำเนินการ

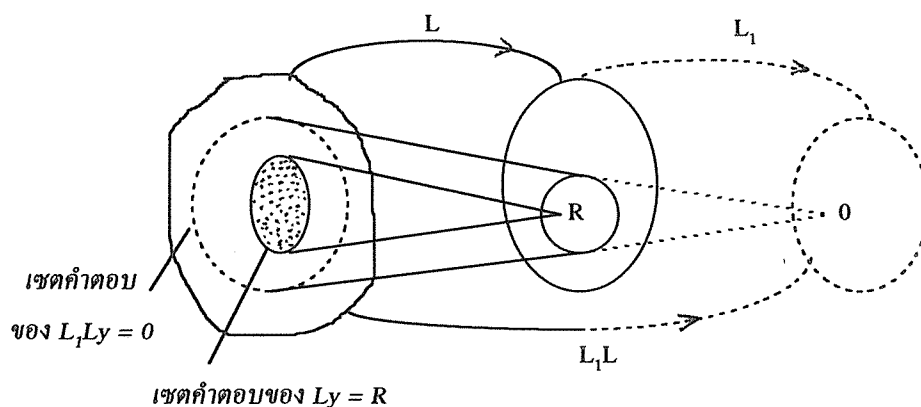
$$L_1 \text{ ซึ่ง } L_1 R = 0$$

ถ้าเราหา L_1 ได้ จะได้ว่า สำหรับทุกคำตอบ y ของ $Ly = R$

$$L_1 Ly = L_1 R = 0$$

นั่นคือ คำตอบของสมการ $Ly = R$ อยู่ในเซตของคำตอบของสมการเอกพันธ์ $L_1 Ly = 0$

ดังรูป (ซึ่งเราทราบวิธีการหาคำตอบแล้ว)



เซตคำตอบของ $L_1Ly = 0$ อาจใหญ่กว่าเซตคำตอบของสมการ $Ly = R$ ด้วยเหตุผลที่ว่า อาจมีฟังก์ชัน S อื่น ๆ นอกจาก R ซึ่ง $L_1S = 0$ เซตคำตอบของ $L_1Ly = 0$ (วงเส้นประ) จึงใหญ่กว่า เราต้องค้นหาคำตอบของ $Ly = R$ อีกครั้งหนึ่งจากเซตคำตอบนี้ ซึ่งทำได้โดยบังคับเงื่อนไข $Ly = R$ กับคำตอบทั่วไปของ $L_1Ly = 0$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.7.2 จงหาคำตอบของสมการ $(D^2 + 1)y = e^{-x}$ (1)

วิธีทำ

$$\text{ทดลอง } (D + 1)(D^2 + 1)y = (D + 1)e^{-x} = 0 \text{ (2)}$$

ดังนั้นเซตคำตอบของสมการ (2) จะเป็นขอบเขตของคำตอบ (1)

หาคำตอบของสมการ (2) ซึ่งมีรากสมการช่วย $-1, \pm i$ จะได้คำตอบสมการ (2) คือ

$$y = c_1e^{-x} + c_2\cos x + c_3\sin x$$

$$\text{คำตอบนี้จะเป็นคำตอบของ } (D^2 + 1)y = e^{-x}$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } (D^2 + 1)(c_1e^{-x} + c_2\cos x + c_3\sin x) = e^{-x}$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } (D^2 + 1)c_1e^{-x} + (D^2 + 1)(c_2\cos x + c_3\sin x) = e^{-x}$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } 2c_1e^{-x} + 0 = e^{-x}$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ (เทียบสัมประสิทธิ์) ได้ } 2c_1 = 1, c_1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{ดังนั้นคำตอบของ (1) คือ } y = \frac{1}{2}e^{-x} + c_2\cos x + c_3\sin x$$

ข้อสังเกต 1 จงสังเกตว่าคำตอบมี 2 ส่วน คือ $c_2\cos x + c_3\sin x$ เป็นคำตอบ y_c ของ

$$(D^2 + 1)y = 0 \text{ และ } \frac{1}{2}e^{-x} \text{ คำตอบเฉพาะ, } y_p, \text{ ของสมการ } (D^2 + 1)y = e^{-x}$$

เมื่อจัดคำตอบในรูป

$$y = y_c + y_p \text{ เป็น}$$

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x + \frac{1}{2}e^{-x}$$

2 เรียก $D + 1$ ว่าตัวลบข้างของ e^{-x} วิธีใช้ตัวลบข้างโดยทั่วไปในการแก้สมการต้องหาตัวลบข้างของ R ได้

ต่อไปนี้เป็นตารางพื้นฐานของตัวลบล้าง (ใช้ m เป็นจำนวนเต็ม ≥ 0)

$R(x)$	ตัวลบล้าง
x^m	D^{m+1}
e^{ax}	$D - a$
$x^m e^{ax}$	$(D - a)^{m+1}$
$\cos bx$ หรือ $\sin bx$	$D^2 + b^2$
$e^{ax} \cos bx$ หรือ $e^{ax} \sin bx$	$(D - a)^2 + b^2$
$x^m \cos bx$ หรือ $x^m \sin bx$	$(D^2 + b^2)^{m+1}$
$x^m e^{ax} \cos bx$ หรือ $x^m e^{ax} \sin bx$	$[(D - a)^2 + b^2]^{m+1}$

วิธีใช้ตัวลบล้างมีข้อจำกัดหนึ่งคือ $R(x)$ ต้องเป็นฟังก์ชันที่มีตัวลบล้าง ถ้า $R(x)$ เป็น $\frac{1}{x}$, $\tan x$, $\sec x$, e^{x^2} , $\ln x$ ฯลฯ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่อนุพันธ์ไม่ย้อนกลับเป็นพจน์ที่คล้าย $R(x)$ เดิม และไม่มีทางเป็น 0 จะใช้วิธีนี้ได้ เพราะไม่มีตัวลบล้าง

ตัวอย่าง 4.7.3 จงแก้สมการ $y'' + 2y' = 3xe^x$

วิธีทำ ตัวลบล้างของ $3xe^x$ ได้แก่ $(D - 1)^2$

เขียนสมการโทยได้เป็น $(D^2 + 2D)y = 3xe^x$

ดังนั้นคำตอบของสมการ $(D - 1)^2 (D^2 + 2D)y = 0$

$$\text{หรือ } y = (c_1 + c_2x)e^x + c_3 + c_4e^{-2x}$$

เป็นขอบเขตคำตอบของสมการโทย คำตอบนี้จะเป็นคำตอบของ $(D^2 + 2D)y = 3xe^x$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } (D^2 + 2D) [(c_1 + c_2x)e^x + c_3 + c_4e^{-2x}] = 3xe^x$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } (D^2 + 2D) (c_1 + c_2x)e^x + 0 = 3xe^x \quad \dots\dots\dots (A)$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } e^x (D^2 + 4D + 3) (c_1 + c_2x) = 3xe^x$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } 3c_1e^x + 4c_2e^x + 3c_2xe^x = 3xe^x$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } 3c_1 + 4c_2 = 0 \text{ และ } 3c_2 = 3$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } c_2 = 1, c_1 = -\frac{4}{3}$$

ดังนั้นคำตอบทั่วไปของสมการ $y'' + 2y' = 3xe^x$ คือ

$$y = (x - \frac{4}{3})e^x + c_3 + c_4e^{-2x}$$

ข้อสังเกต วิธีนี้ผู้แต่งหลายคน สังเกต เช่น บรรทัด (A) ของตัวอย่าง 4.7.3 ได้ก็หลังจากหา

$$y_c \text{ แล้ว เราทราบว่า } L(y_c + y_p) = 3xe^x$$

$$L(y_p) = 3xe^x \quad \because Ly_c = 0$$

ดังนั้น จึงพยายามจะหารูป y_p ที่เป็นไปได้ เช่น ให้ $y_p = Ae^x + Bxe^x$ แล้วหา Ly_p เพื่อ
กำหนดค่า A, B แล้วนำไปแทนค่า จะได้ y_p วิธีการเช่นนี้ จึงมีชื่อเรียกว่า การเทียบสัมประสิทธิ์
(Undetermined coefficient) วิธีการเช่นนี้ต้องระวังการกำหนดรูป y_p อย่างมาก

4.7.3 วิธีแปรค่าพารามิเตอร์ (variation of parameters)

ผู้ใช่วิธีการนี้คนแรกคือ โยฮัน แบร์นูลลี (Johann Bernoulli) ซึ่งใช้แก้สมการเชิงเส้น
อันดับ 1 คนต่อมาคือ ลากรองจ์ (Lagrange) ใช้วิธีการนี้แก้สมการอันดับ 2 ในปี ค.ศ.1774

เราทราบแล้วว่าวิธีใช้ตัวลบล้าง มีขอบเขตการใช้จำกัด ตรงที่สมการต้องมีสัมประสิทธิ์เป็น
ตัวคงค่าและต้องหาตัวลบล้างของ $R(x)$ ได้ มีตัวอย่าง $R(x)$ มากมายที่หาตัวลบล้างไม่ได้ ตัวอย่าง
เพิ่มเติมได้แก่ e^{-x^2} , $|x|$, x^q , q มิใช่จำนวนเต็มบวกหรือ 0 อินเวอร์สฟังก์ชันของฟังก์ชัน ตรี
โกณมิติ เช่น $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ เหล่านี้ วิธีใช้ตัวลบล้างแก้ไม่ได้ เราจะใช้วิธีแปรค่าพารามิเตอร์นี้
แทน ซึ่งใช้ได้แม้กระทั่งสมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร

พิจารณา $Ly = R$

สำหรับวิธีแปรค่าพารามิเตอร์ เราได้สนใจ $R(x)$ แต่สนใจฟังก์ชันเดิมเดิม

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

ฟังก์ชันเดิมเดิมนี เป็นคำตอบของ $Ly = 0$ ดังนั้น จึงไม่มีโอกาสเป็นคำตอบของ $Ly = R$ ทั้งนี้
เพราะตัวคงค่า c_i “แข็ง” เกินไป ถ้าตัวคงค่า c_i มีค่าแปรเปลี่ยนเป็นฟังก์ชัน $v_i(x)$, มีสถานะเหมาะสม
สมบางประการ ย่อมมีคำตอบเฉพาะในรูป

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 + \dots + v_n y_n, v_i = v_i(x)$$

ซึ่งจะกล่าวถึงรายละเอียดต่อไป

ตัวอย่าง 4.7.4 จงแสดงว่า ถ้า $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$ เป็นฟังก์ชันเดิมเดิมของ

$$Ly = (D^3 + P_1 D^2 + P_2 D + P_3)y = R, P_i = P_i(x)$$

$$\text{จะได้ } y = v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3$$

เมื่อ v_1, v_2, v_3 สอดคล้องกับสมการ

ดังนั้นในการหา y_p

1. เปลี่ยน c_i ใน y_c ด้วย $v_i(x)$
2. หาค่า $v_1'(x), v_2'(x), \dots, v_n'(x)$ จากสมการ (I)
3. อินทิเกรตค่าที่ได้ใน 2 จะได้ $v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)$
4. แทนค่าเหล่านี้ในข้อ 1 จะได้ y_p
5. เขียนคำตอบ ในรูป $y = y_c + y_p$

การพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.7.2 เราจะใช้สัญกรณ์เวกเตอร์เพื่อความรวบรัด การพิสูจน์จะคล้ายกับตัวอย่าง 4.7.4 ขอบททวนในปริภูมิเวกเตอร์ n มิติดังนี้

$$\begin{aligned} \text{ให้ } \underline{c} &= (c_1, c_2, \dots, c_n) && \text{แทนเวกเตอร์คงค่า} \\ \underline{u} &= (u_1, u_2, \dots, u_n) && \text{แทนเวกเตอร์ฟังก์ชัน} \\ a\underline{u} &= (au_1, au_2, \dots, au_n) && \text{แทนผลคูณสเกลาร์ของ } a \text{ กับ } \underline{u} \\ \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle &= u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n && \text{แทนผลคูณภายใน (inner product)} \\ &&& \text{ของ } \underline{u} \text{ กับ } \underline{v} \end{aligned}$$

สมบัติ

1. $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle$
2. $f(x)\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \langle f(x)\underline{u}, \underline{v} \rangle = \langle \underline{u}, g(x)\underline{v} \rangle$
3. $\langle \underline{u}, \underline{v} + \underline{w} \rangle = \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle + \langle \underline{u}, \underline{w} \rangle$

พิสูจน์ เนื่องจาก $y_c = \langle \underline{c}, \underline{y} \rangle$ เป็นฟังก์ชันเดิมเต็ม จะได้รูป

$$y_p = \langle \underline{v}, \underline{y} \rangle \text{ และมีเงื่อนไข (I) คือ}$$

$$\langle \underline{v}', \underline{y} \rangle = \langle \underline{v}', \underline{y}' \rangle = \dots = \langle \underline{v}', \underline{y}^{(n-2)} \rangle = 0,$$

$$\langle \underline{v}', \underline{y}^{(n-1)} \rangle = \frac{R}{a_0}$$

$$\text{จาก } y_p = \langle \underline{v}, \underline{y} \rangle$$

$$\therefore Dy_p = \langle \underline{v}, \underline{y}' \rangle \quad (\langle \underline{v}', \underline{y} \rangle = 0 \text{ ตามเงื่อนไขแรกๆของ (I)})$$

$$\vdots$$

$$D^n y_p = \langle \underline{v}, \underline{y}^{(n)} \rangle + \langle \underline{v}', \underline{y}^{(n-1)} \rangle$$

$$= \langle \underline{v}, \underline{y}^{(n)} \rangle + \frac{R}{a_0}, \quad (\langle \underline{v}', \underline{y}^{(n-1)} \rangle = \frac{R}{a_0} \text{ ตามเงื่อนไขสุดท้ายของ (I)})$$

$$\text{อนึ่ง } Ly = (Ly_1, Ly_2, \dots, Ly_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ } Ly_p &= a_0 y_p^{(n)} + a_1 y_p^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y_p' + a_n y_p \\
 &= a_0 (\langle \underline{v}, \underline{y}^{(n)} \rangle + \langle \underline{v}', \underline{y}^{(n-1)} \rangle) + a_1 \langle \underline{v}', \underline{y}^{(n-1)} \rangle \\
 &\quad + \dots + a_n \langle \underline{v}, \underline{y} \rangle \\
 &= (\langle \underline{v}, a_0 \underline{y}^{(n)} \rangle + a_0 \frac{R}{a_0}) + \langle \underline{v}, a_1 \underline{y}^{(n-1)} \rangle + \dots + \langle \underline{v}, a_n \underline{y} \rangle \\
 &\quad (\text{คุณสมบัติข้อ 2}) \\
 &= \langle \underline{v}, Ly \rangle + R \quad (\text{ผลจากคุณสมบัติข้อ 3}) \\
 &= \langle \underline{v}, \underline{0} \rangle + R \\
 &= 0 + R \\
 &= R \quad \square
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.7.5 จงแก้สมการ $(D^2 + 1)y = \tan x$

วิธีทำ ราก $m^2 + 1 = 0$ คือ $\pm i$

$$y_c = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

$$\text{ให้ } y_p = v_1 \sin x + v_2 \cos x \quad \text{ซึ่ง}$$

$$\begin{cases} v_1' \sin x + v_2' \cos x = 0 \\ v_1' \cos x - v_2' \sin x = \tan x \end{cases}$$

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ \tan x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix}} = \frac{-\sin x}{-1} = \sin x$$

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} \sin x & 0 \\ \cos x & \tan x \\ \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix}} = \frac{-\sin^2 x}{\cos x} = \cos x - \sec x$$

$$\therefore v_1 = \int \sin x \, dx \quad \text{เลือกให้ } v_1 = -\cos x$$

$$v_2 = \int (\cos x - \sec x) \, dx \quad \text{ให้ } v_2 = \sin x - \ln |\sec x + \tan x|$$

$$\begin{aligned}\therefore y_p &= (-\cos x) \sin x + (\sin x - \ln |\sec x + \tan x|) \cos x \\ &= -\cos x \ln |\sec x + \tan x|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{คำตอบทั่วไป } y &= y_c + y_p \\ &= c_1 \sin x + c_2 \cos x - \cos x \ln |\sec x + \tan x|\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.7.6 จงแก้สมการ $(D^3 - 7D^2 + 14D - 8)y = \ln x, x > 0$

วิธีทำ รากของสมการช่วย 1, 2, 4

$$\begin{aligned}y_c &= c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{4x} \\ y_p &= v_1 e^x + v_2 e^{2x} + v_3 e^{4x}\end{aligned}$$

เงื่อนไข

$$\begin{aligned}v_1' e^x + v_2' e^{2x} + v_3' e^{4x} &= 0 \\ v_1' e^x + 2v_2' e^{2x} + 4v_3' e^{4x} &= 0 \\ v_1' e^x + 4v_2' e^{2x} + 16v_3' e^{4x} &= \ln x\end{aligned}$$

การแก้สมการนี้จะสะดวก เมื่อใช้ $v_1' e^x, v_2' e^{2x}, v_3' e^{4x}$ เป็นตัวไม่ทราบค่า

$$v_1' e^x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ \ln x & 4 & 16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix}} = \frac{\ln x}{3}$$

$$v_2' e^{2x} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & \ln x & 16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix}} = \frac{\ln x}{2}$$

$$v_3' e^{4x} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & \ln x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix}} = \frac{\ln x}{6}$$

$$\text{ดังนั้น } v_1' = \frac{e^{-x} \ln x}{3}, v_2' = \frac{-e^{2x} \ln x}{2}, v_3' = \frac{e^{-4x} \ln x}{6}$$

$$\text{และ } y_p = \frac{1}{3}e^x \int e^{-x} \ln x dx - \frac{1}{2}e^{2x} \int e^{-2x} \ln x dx + \frac{1}{6}e^{4x} \int e^{-4x} \ln x dx$$

$$\text{คำตอบคือ } y = y_c + y_p$$

4.7.4 วิธีการหาคำตอบเฉพาะแบบอื่น ๆ

สำหรับโจทย์สมการเชิงอนุพันธ์บางข้อ อาจมีลักษณะง่ายในการหาคำตอบเฉพาะ ซึ่งเราตรวจพิจารณาได้ จงศึกษาตัวอย่างต่อไปนี้เป็นแนวทาง

$$1. \text{ จากสมการ } f(D)y = (a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n)y = R$$

$$\text{ถ้า } R = \text{ตัวคงที่ } R_0 \text{ คำตอบเฉพาะได้แก่ } y_p = \frac{R_0}{a_n}, \quad a_n \neq 0$$

$$\text{ถ้า } R = e^{bx} \text{ คำตอบเฉพาะได้แก่ } y_p = \frac{e^{bx}}{f(b)}, \quad f(b) \neq 0$$

ตัวอย่าง 4.7.7 จงแก้สมการ

$$\text{ก. } (D^2 - 3D + 2)y = 16$$

$$\text{ข. } (D^2 - 4D + 3)y = e^{2x}$$

วิธีทำ ก. ฟังก์ชันเต็มเต็มคือ $y_c = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ ($\because$ รากสมการช่วย 1, 2)

$$\text{โดยการตรวจพิจารณา } y_p = \frac{16}{2} = 8$$

$$\text{คำตอบทั่วไป } y = y_c + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + 8$$

$$\text{ข. ฟังก์ชันเต็มเต็ม คือ } y_c = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$$

$$\text{โดยการตรวจพิจารณา } y_p = \frac{e^{2x}}{2^2 - 4 \cdot 2 + 3} = -e^{2x}$$

$$\text{ดังนั้น คำตอบทั่วไป } y = c_1 e^x + c_2 e^{3x} - e^{2x}$$

ตัวอย่าง 4.7.8 จงแก้สมการ

ก. $(D^5 + 4D^3)y = 7$

ข. $(D^2 - 4D + 3)y = e^x$

วิธีทำ ก. $y_c = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4\cos 2x + c_5\sin 2x$

สำหรับ y_p ใช้ $y_p = \frac{R_0}{a_n}$ ไม่ได้ เพราะ $a_n = 0$ เราอาจให้ y_p เป็นฟังก์ชัน ซึ่งหาอนุพันธ์ 3 ครั้ง แล้วคูณด้วย 4 ได้ 7 ดังนั้น y_p ได้แก่ $\frac{7}{4} \cdot \frac{x^3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7x^3}{24}$
ดังนั้น คำตอบทั่วไป

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4\cos x + c_5\sin 2x + \frac{7}{24}x^3$$

ข. $y_c = c_1e^x + c_2e^{3x}$

สำหรับ y_p ใช้สูตร $y_p = \frac{e^{bx}}{f(b)}$ ไม่ได้ เพราะ $f(b) = 0$

เขียนสมการใหม่ $e^{-x}(D^2 - 4D + 3)y = 1$

$$(D^2 - 2D)e^{-x}y = 1 \quad (\text{การเลื่อนเอกซโพเนนเชียล})$$

$$e^{-x}y_p = -\frac{x}{2} \quad (\text{คำตอบเฉพาะของ } (D^2 - 2D)u = 1)$$

$$y_p = -\frac{x}{2}e^x$$

ดังนั้น คำตอบทั่วไป $y = c_1e^x + c_2e^{3x} - \frac{x}{2}e^x$

แบบฝึกหัด 4.7

- ถ้า L_1 และ L_2 เป็นตัวลบข้างของฟังก์ชัน f และ g ตามลำดับ จงแสดงว่า L_1L_2 เป็นตัวลบข้าง $af + bg$ สำหรับทุกตัวคงค่า a และ b

- จงหาตัวลบข้างของฟังก์ชันชุดต่อไปนี้

ก. $x^3 + 4x^2 + 8$

ข. $(1 + 2x + x^2 - x^3)e^{2x}$

ค. $x^m + e^{ax}$

ง. $x^2 \sin 3x$

จ. $\sin^2 3x + \cos^2 2x$ (ข้อแนะ : $\sin^2 3x = \frac{1 - \cos 6x}{2}$, $\cos^2 2x = \frac{\cos 4x + 1}{2}$)

ฉ. x^x, e^x, xe^x

- จงใช้เอกลักษณ์ $\cos bx = \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2}$ และ $\sin bx = \frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i}$

และข้อ 1 แสดงว่าตัวลบข้างของ $x^m \cos bx$ และ $x^m \sin bx$ เป็น $(D^2 + b^2)^{m+1}$

4. จงแก้สมการเชิงอนุพันธ์

ก. $y'' - y' = x^2$

ข. $y'' - 4y = e^{2x}$

ค. $y'' + 2y' = 3xe^x$

ง. $y'' + 4y = \sin x$

จ. $(D^2 - 9)y = 18\cos 3x + 9$ เมื่อ $x = 0, y = 1, Dy = 3$

ฉ. $D^3 y - D^2 y - Dy + y = 7 - 6x - 3x^2 + x^3$

ช. $(D^2 - 7D + 12)y = 14e^{-3x} + 4e^{5x}$

ซ. $(D^2 - 5D + 4)y = -4(x^2 + 1)e^{3x}$

5. จงแก้สมการเชิงอนุพันธ์

ก. $(D^2 + 1)y = \sec x$

ข. $(D^3 + D)y = \sec^2 x$

ค. $(D^2 + 2D + 2)y = e^{-x} \sec x$

ง. $(D - 1)y = e^{2x} (3 \tan e^x + e^x \sec e^x)$

จ. $(D^2 - 1)y = -\frac{2}{1+e^x}$

ฉ. $(D^3 + D)y = \sec^2 x$

ช. $(D^2 - 1)y = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$

ซ. $(D^2 - 3D + 2)y = \sin e^{-x}$

ณ. $(D^2 + 3D + 2)y = \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x}$

ญ. $(D - 1)^2 y = e^{2x} (e^{2x} - e^x + 1)$

6. จงแสดงว่า $y_1 = 1, y_2 = x^2$ เป็นคำตอบเฉพาะของ $(xD^2 - D)y = 0$ และแก้สมการโดยใช้วิธีแปรค่าพารามิเตอร์

7. จงสังเกตว่า x และ e^x เป็นคำตอบของสมการเอกพันธ์ที่เกี่ยวข้องของสมการต่อไปนี้

$(x - 1)D^2 y - x Dy + y = \frac{(x-1)^2}{x}$ จงใช้ข้อเท็จจริงนี้แก้สมการดังกล่าว

8. ให้ y_1 และ y_2 เป็นคำตอบของสมการเอกพันธ์ที่เกี่ยวข้องของ

$y'' + r(x)y' + q(x)y = f(x)$ (A)

ให้ $w(x)$ เป็นวอร์อนสเกียนของ y_1 และ y_2 ซึ่ง $w(x) \neq 0$ ตลอดช่วง $a < x < b$

จงแสดงว่าคำตอบเฉพาะของสมการ (A) คือ

$$y_p = \int_a^x \frac{f(t)[y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)]}{w(t)} dt$$

คำตอบแบบฝึกหัด 4.7

2. ก. D^4

ข. $(D - 2)^4$

ค. $D^{m+1} (D - a)$

ง. $(D + a)^3$

จ. $(D^2 + 16)(D^2 + 36)$

ฉ. $D^2 (D - 1)^2$

4. ก. $y = c_1 + c_2 e^x - 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$

ข. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + \frac{x}{4} e^{3x}$

ค. $y = c_1 + c_2 e^{-2x} + (x - \frac{4}{3})e^x$

ง. $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{3} \sin x$

- จ. $y = e^{3x} - 1 - \cos 3x$
 ฉ. $y = (c_1 + c_2 x)e^x + c_3 e^{-x} + 1 + x^3$
- ข. $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x} + \frac{1}{3} e^{-3x} + 2e^{5x}$
 ฅ. $y = c_1 e^x + c_2 e^{4x} + e^{3x} (2x^2 + 2x + 5)$
5. ก. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \ln |\cos x| + x \sin x$
- ข. $y = c_1 + c_2 \sin x + c_3 \cos x - \cos x \ln |\sec x + \tan x|$
- ค. $y = e^{-x} (c_1 \sin x + c_2 \cos x) + x e^{-x} \sin x + e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x \ln |\cos x|$
- ง. $y = y_c + e^x \ln |\sec e^x|$
- จ. $y = y_c - 1 - x e^x + (e^x - e^{-x}) \ln (1 + e^x)$
- ฉ. $y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x - \cos x \ln |\sec x + \tan x|$
- ข. $y = y_c - x e^{-x} + \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \ln |1 - e^{-2x}|$
- ฅ. $y = y_c - e^{2x} \sin e^{-x}$
- ฉ. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{x}$
- ญ. $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + e^{e^x}$
6. $y = c_1 + c_2 x^2 - 2 \ln |x|$
7. $y = c_1 x + c_2 e^x - 1 - x \ln |x|$

บทที่ 5

การแปลงลาปลาซ

5.1 บทนำ

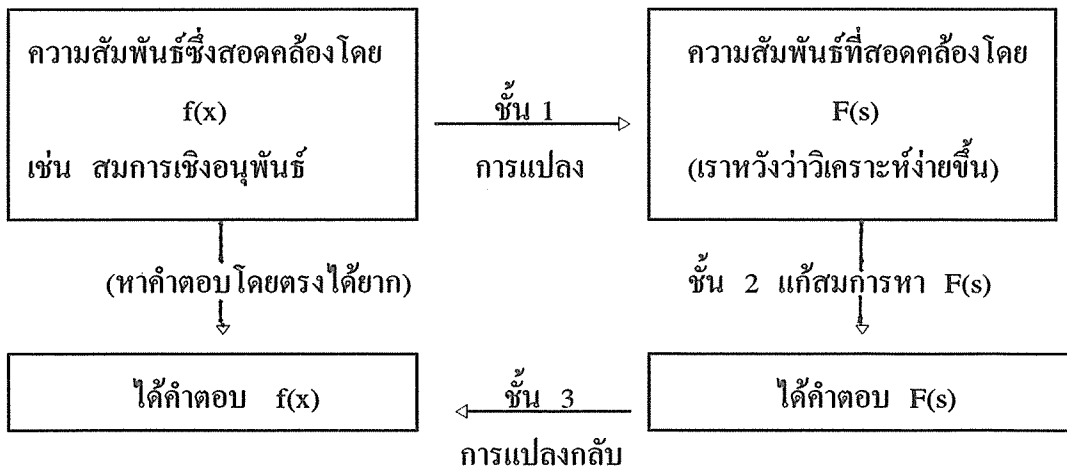
เราใช้การแปลงลาปลาซแก้ปัญหาต่าง ๆ เช่น

- สมการเชิงอนุพันธ์ทั้งแบบธรรมดาและแบบพาร์เชียล
- สมการอินทิกรัล (integral equations)
- สมการผลต่างสืบเนื่อง (difference equations)
- สมการเชิงอนุพันธ์ควอินทิกรัล (integro differential equations)
- สมการผลต่างสืบเนื่องควดิฟเฟอเรนเชียล (differential difference equations)

นอกจากนี้เรายังใช้หาค่าอินทิกรัลบางอย่างได้ด้วย

ความมุ่งหมายของหัวข้อนี้ คือ ให้เข้าใจหลักการและเหตุผลที่จะนำวิธีการแปลงลาปลาซ
ใช้ช่วยแก้สมการเชิงอนุพันธ์พอสังเขป

การแปลงลาปลาซจะเปลี่ยนฟังก์ชันหนึ่งไปเป็นอีกฟังก์ชันหนึ่ง ในระบบที่ง่ายขึ้น
แนวทางแก้ปัญหาชนิดนี้



ข้อจำกัด การแปลงลาปลาซใช้ได้กับฟังก์ชันที่มีนิยามตลอดช่วง $x \geq 0$ เป็นอย่างน้อย
และไม่สามารถใช้กับฟังก์ชันที่มีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงเร็วจนเกินไป ขณะที่
 $x \rightarrow \infty$ ด้วย ฟังก์ชันที่มีค่าไม่เพิ่มขึ้นหรือลดลงเร็วจนเกินไป ขณะที่ $x \rightarrow \infty$
(เราใช้ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลเป็นสิ่งที่เทียบ) เรียกว่า ฟังก์ชันในกำกับของฟังก์ชัน
เอกซ์โพเนนเชียล (is of exponential order) ฟังก์ชัน $f(x)$ จะอยู่ในกำกับ

ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลก็ต่อเมื่อ มีฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล e^{cx} ซึ่งทำให้ผลหาร $f(x)/e^{cx}$ มีคุณสมบัติว่า เมื่อ $x > a$ บางค่าแล้ว $f(x)/e^{cx}$ จะมีขนาดไม่เกินตัวคงค่า M บางตัว

บทนิยาม 5.1.1 ฟังก์ชัน $f(x)$ จะอยู่ในกำกับของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล (is of exponential order) ก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง a, c และ $M > 0$ ซึ่ง

$$|f(x)| \leq Me^{cx}$$

สำหรับทุก $x > a$

ทฤษฎีบท 5.1.1

- (1) ถ้ามีจำนวนจริง c ซึ่ง $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{e^{cx}}$ เป็นจำนวนจำกัด จะได้ $f(x)$ อยู่ในกำกับของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล
- (2) ถ้าสำหรับทุกจำนวนจริง c , $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{e^{cx}} = \pm \infty$ จะได้ $f(x)$ ไม่อยู่ในกำกับของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

พิสูจน์ (1) ให้ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{e^{cx}} = L$ จะได้ว่า สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง a ซึ่งเมื่อ $x > a$ จะได้

$$\left| \frac{f(x)}{e^{cx}} - L \right| < \varepsilon$$

$$\text{นั่นคือ } \frac{|f(x)|}{e^{cx}} \leq |L| + \varepsilon$$

$$\text{ดังนั้น } |f(x)| \leq Me^{cx} \text{ โดย } M = |L| + \varepsilon$$

จึงได้ว่า $f(x)$ อยู่ในกำกับของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

- (2) ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ตัวอย่าง 5.1.1

ฟังก์ชัน 5^x เป็นฟังก์ชันในกำกับของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล เพราะ

$$|5^x| \leq e^{2x} \quad \text{ทั้งนี้เนื่องเพราะ } e^2 > 5$$

ฟังก์ชัน $x^2 - 2x$ เป็นฟังก์ชันในกำกับของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล เพราะ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

ฟังก์ชัน e^{x^2} มิใช่ฟังก์ชันในกำกับของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล เพราะ

$$\begin{aligned} \text{สำหรับทุก ๆ ค่า } c \text{ เราได้ } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2}}{e^{cx}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^2 - cx} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{(x - \frac{c}{2})^2 - \frac{c^2}{4}} \\ &= \infty \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.1.2 ฟังก์ชันที่อยู่ในกำกับของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ได้แก่

e^{2x} , 100^x , e^{-x^2} , $\sin x$, $\cos x$ พหุนามของ x , $x^{-1/2}$ และผลคูณของฟังก์ชันเหล่านี้

ฟังก์ชันที่ไม่อยู่ในกำกับของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ได้แก่

$$e^{x^{3/2}}, e^{x^3}, \tan x, \sec x$$

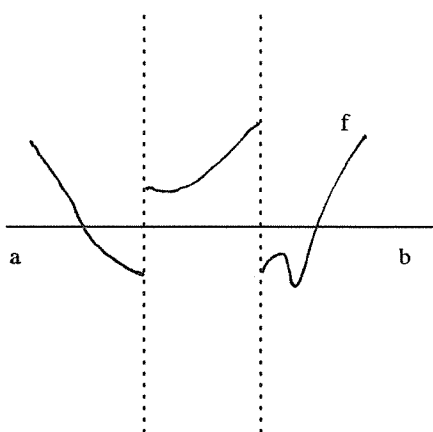
บทนิยาม 5.1.2 ฟังก์ชัน $f(x)$ ต่อเนื่องเป็นตอน ๆ (piecewise continuous) ในช่วงปิด

$a \leq x \leq b$ ก็ต่อเมื่อ

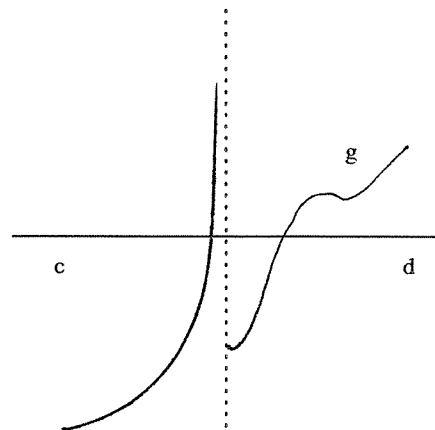
1. f ต่อเนื่องทุกจุดหรือถ้าไม่ต่อเนื่อง ณ บางจุดจะมีที่ไม่ต่อเนื่องจำนวนจำกัด
2. สำหรับทุก ๆ ค่าคงตัว $c \in [a, b]$ ถ้า f ไม่ต่อเนื่องที่ c แล้ว $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$

และ $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ เป็นจำนวนจริง ทุก $x \in [a, b]$

ตัวอย่าง 5.1.3



f ต่อเนื่องเป็นตอน ๆ บน $[a, b]$



g ไม่ต่อเนื่องเป็นตอน ๆ บน $[c, d]$

ตัวอย่าง 5.1.4

$\sin x$, $\cos x$ และฟังก์ชันขั้นบันไดต่อเนื่องเป็นตอน ๆ ในทุก ๆ ช่วงปิด

$\tan x$, $\sec x$, $\ln x$, $\frac{1}{x}$ ไม่ต่อเนื่องเป็นตอน ๆ ในช่วงปิดบางช่วง

ฟังก์ชันที่ต่อเนื่องเป็นตอน ๆ ในช่วง $[0, X]$ ทุก $X > 0$ และอยู่ในกำกับของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลจะมีผลการแปลงลาปลาซ สำหรับการพิสูจน์ให้ภาคผนวก

บทนิยาม 5.1.3 ผลการแปลงลาปลาซของ $f(x)$ หมายถึงฟังก์ชัน $F(s)$ มีนิยามว่า

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx \quad \text{ทุกค่า } s \text{ ที่อินทิกรัลนี้มีอยู่}$$

หมายเหตุ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนผลการแปลงลาปลาซมีหลายแบบ เช่น $[f(x)]$, $[f(x)]$, $L[f(x)]$ ในหนังสือเล่มนี้จะใช้ $L[f(x)]$

ทฤษฎีบท 5.1.2 ถ้า $F(s)$ เป็นผลการแปลงลาปลาซของบางฟังก์ชัน $f(x)$ ซึ่งอยู่ในกำกับของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล จะได้

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$$

เนื่องจาก $|f(x)| \leq Me^{cx}$ สำหรับบางค่า $M > 0$ และ c เราได้

$$\begin{aligned} \left| \int_0^X e^{-sx} f(x) dx \right| &\leq \int_0^X e^{-sx} |f(x)| dx \\ &\leq \int_0^X e^{-sx} Me^{cx} dx \\ &= M \int_0^X e^{-(s-c)x} dx \\ &= \frac{M}{s-c} - \frac{M}{s-c} e^{-(s-c)x} \end{aligned}$$

ถ้า $s > c$ จะได้ $e^{-(s-c)x} \rightarrow 0$ เมื่อ $X \rightarrow \infty$

ดังนั้น $|F(s)| < \frac{M}{s-c}$ และ $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$ $\square$

ทฤษฎีบทนี้ จะช่วยตรวจว่าการหาผลการแปลงลาปลาซในแต่ละตัวอย่างมีผิดพลาดหรือไม่ ถ้าได้ $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s)$ เป็นจำนวนจริงอื่นที่ไม่ใช่ 0 ผลการแปลงลาปลาซที่หาได้ในตัวอย่งนั้นย่อมผิดพลาด

ตัวอย่าง 5.1.5 จงหาผลการแปลงลาปลาซ

ก. e^{2x}

ข. x^2

$$\begin{aligned} \text{ก. } L(e^{2x}) &= \int_0^\infty e^{-sx} e^{2x} dx \\ &= \int_0^\infty e^{-(s-2)x} dx \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{(s-2)} e^{-(s-2)x} \right]_{x=0}^T \\ &= 0 + \frac{1}{(s-2)} \quad s > 2 \end{aligned}$$

$$\therefore L[e^{2x}] = \frac{1}{(s-2)}, \quad s > 2$$

$$\begin{aligned} \text{ข. } L[x^2] &= \int_0^\infty e^{-sx} x^2 dx \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{x^2 e^{-sx}}{s} \right]_{x=0}^T + \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{-2xe^{-sx}}{s^2} \right]_{x=0}^t + \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\frac{-2e^{-sx}}{s^3} \right]_{x=0}^u \\ &= 0 + 0 + \frac{2}{s^3}, \quad s > 0 \\ &= \frac{2}{s^3}, \quad s > 0 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.1.6 จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $\sin ax$

$$\text{วิธีทำ } L[\sin ax] = \int_0^\infty e^{-sx} \sin ax \, dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-sx} \sin ax \, dx$$

โดยการอินทิเกรตทีละส่วน จะได้

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-sx} \sin ax \, dx &= -\frac{e^{-sx}}{s} \sin ax \Big|_0^T + \frac{a}{s} \int_0^T e^{-sx} \cos ax \, dx \\ &= -\frac{e^{-sT}}{s} \sin aT - \frac{a}{s^2} e^{-sx} \cos ax \Big|_0^T - \frac{a^2}{s^2} \int_0^T e^{-sx} \sin ax \, dx \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\left(1 + \frac{a^2}{s^2}\right) \int_0^T e^{-sx} \sin ax \, dx = -\frac{e^{-sT}}{s} \sin aT - \frac{a}{s^2} e^{-sT} \cos aT + \frac{a}{s^2}$$

$$\text{เนื่องจาก กรณีที่ } s > 0 \text{ เราได้ } \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-sT} \sin aT = \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-sT} \cos aT = 0$$

$$\text{ดังนั้น } L[\sin ax] = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$$

5.2 คุณสมบัติพื้นฐานของการแปลงลาปลาซ

ทฤษฎีบท 5.2.1 การแปลงลาปลาซเป็นการแปลงเชิงเส้น นั่นคือ

1. $L[af(x)] = a L[f(x)]$
2. $L[f(x) + g(x)] = L[f(x)] + L[g(x)]$

$$\begin{aligned} \text{พิสูจน์ 1. } L[af(x)] &= \int_0^\infty e^{-sx} af(x) \, dx \\ &= a \int_0^\infty e^{-sx} f(x) \, dx \\ &= aL[f(x)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad L [f(x) + g(x)] &= \int_0^{\infty} e^{-sx} [f(x) + g(x)] dx \\
 &= \int_0^{\infty} (e^{-sx} f(x) + e^{-sx} g(x)) dx \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx + \int_0^{\infty} e^{-sx} g(x) dx \\
 &= L [f(x)] + L [g(x)] \quad \square
 \end{aligned}$$

ตารางตัวอย่างคู่ฟังก์ชันของการแปลงลาปลาซ

$f(x)$	$F(s) = L [f(x)]$
1	$1/s$
x	$1/s^2$
x^n	$n! / s^{n+1}$, n เป็นจำนวนเต็มบวก หรือ 0
e^{ax}	$1/(s - a)$
$\sin ax$	$a/(s^2 + a^2)$
$\cos ax$	$s/(s^2 + a^2)$
$\sin h ax$	$a/(s^2 - a^2)$
$\cos h ax$	$s/(s^2 - a^2)$

จากตารางนี้ เราจะใช้งานได้มากขึ้น โดยใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.2.2 (สูตรการเลื่อนเอกซ์โพเนนเชียล) ถ้า $L [f(x)] = F(s)$ จะได้

$$L [e^{ax} f(x)] = F(s - a)$$

พิสูจน์

$$\begin{aligned}
 L [e^{ax} f(x)] &= \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{ax} f(x) dx \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-(s-a)x} f(x) dx \\
 &= F(s - a) \quad \square
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.2.1 จาก $L [\sin bx] = \frac{b^2}{s^2 + b^2}$

$$\therefore L [e^{ax} \sin bx] = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$$

ตัวอย่าง 5.2.2 จงหาผลการแปลงลาปลาซของ

ก. $x^5 e^{-2x}$

ข. $e^{3x} \cos 2x$

วิธีทำ

ก. จาก $L[x^5] = \frac{5!}{s^6}$

จะได้ $L[x^5 e^{-2x}] = \frac{5!}{(s+2)^6}$

ข. จาก $L[\cos 2x] = \frac{s}{s^2+4}$

จะได้ $L[e^{3x} \cos 2x] = \frac{s-3}{(s-3)^2+4} = \frac{s-3}{s^2-6s+13}$

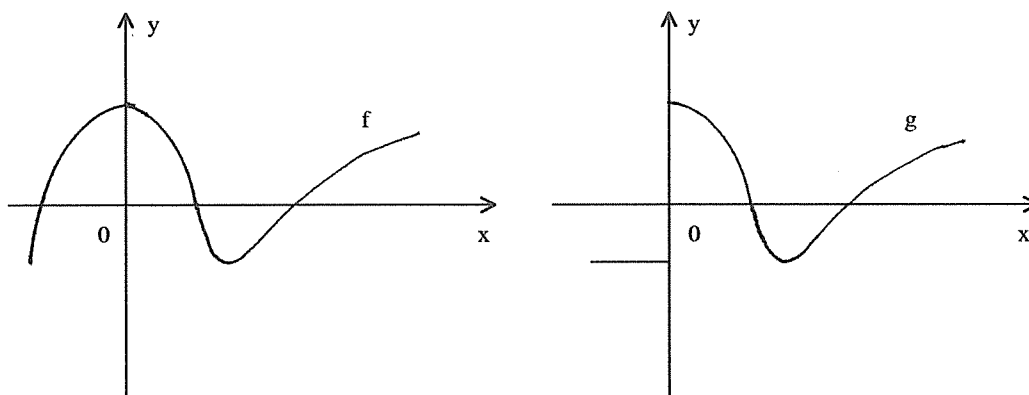
ค. $L[(1-x^2)e^{-x}] = L[e^{-x} - x^2 e^{-x}]$

$$= L[e^{-x}] - L[x^2 e^{-x}]$$

$$= \frac{1}{s+1} - \frac{2!}{(s+1)^3}$$

5.3 การแปลงผกผันลาปลาซ

เนื่องจากมีฟังก์ชันมากกว่า 1 ฟังก์ชันที่มีผลการแปลงลาปลาซเหมือนกันเช่นฟังก์ชันที่มีกราฟเหมือนกันเมื่อ $x \geq 0$ ดังตัวอย่างนี้



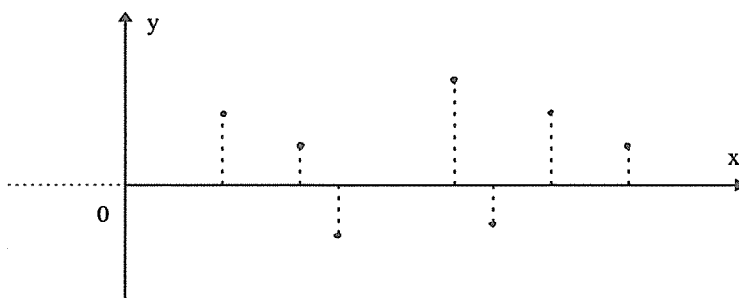
จากรูป f กับ g จะมีผลการแปลงลาปลาซเหมือนกัน

นอกจากนี้ ฟังก์ชันที่ต่างกัน ณ จุดบางจุดจำนวนจำกัดจะให้ผลการแปลงลาปลาซเหมือนกันเช่นกัน ดังนั้นในขั้นตอนการแปลงผกผัน (inverse transformation) เริ่มจาก $F(s)$ หนึ่งฟังก์ชัน จะได้หลายฟังก์ชัน เนื่องจากว่า เลอร์ค ได้พิสูจน์ว่า ถ้า $L[f_1(x)] = L[f_2(x)]$ จะได้ว่าในช่วง $x \geq 0$, $f_1(x) - f_2(x) =$ ฟังก์ชันไรฟ์พื้นที่ $N(x)$ บางฟังก์ชัน ซึ่งมีคุณสมบัติว่า

$$\int_0^x N(t) dt = 0 \text{ สำหรับทุก } x > 0$$

นั่นคือ f_1 กับ f_2 จะมีค่าต่างกัน ณ จุดบางจุด โดยนับจำนวนจุดได้*

ตัวอย่างฟังก์ชันไร้พื้นที่ (null function)



ในการนำไปใช้เราถือว่า ฟังก์ชันซึ่งมีที่ไม่ต่อเนื่องเกินกว่าฟังก์ชันอื่นที่มีผลการแปลงลาปลาซเท่ากัน เป็นฟังก์ชันผิดปกติ (abnormal) และจะเลือกใช้เฉพาะฟังก์ชันที่ต่อเนื่องมากที่สุด จึงได้ว่าผลการแปลงผกผันลาปลาซของ $F(s)$ ซึ่งแทนด้วย $L^{-1}[F(s)]$ มีฟังก์ชันเดียว ดังนั้น เราสามารถใช้ตารางตัวอย่างคู่ฟังก์ชันของการแปลงลาปลาซด้วย

ตัวอย่าง 5.3.1

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = x$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2}\right] = xe^{2x}$$

ทฤษฎีบท 5.3.1 คุณสมบัติการแปลงผกผันลาปลาซ

ถ้า L^{-1} เป็นการแปลงผกผันลาปลาซ จะได้ L^{-1} เป็นการแปลงเชิงเส้น นั่นคือ

1. $L^{-1}[F_1(s) + F_2(s)] = L^{-1}[F_1(s)] + L^{-1}[F_2(s)]$
2. $L^{-1}[cF(s)] = cL^{-1}[F(s)]$

พิสูจน์

$$\begin{aligned}
 1. \quad L^{-1}[F_1(s) + F_2(s)] &= L^{-1}[f_1(x)] + L[f_2(x)] \\
 &\text{สำหรับบางฟังก์ชัน } f_1(x), f_2(x) \\
 &= L^{-1} L[f_1(x) + f_2(x)] \\
 &= f_1(x) + f_2(x) \\
 &= L^{-1}[F_1(s)] + L^{-1}[F_2(s)] \\
 2. \quad L^{-1}[cF(s)] &= L^{-1}[cL[f(x)]] \\
 &= L^{-1}[L[cf(x)]]
 \end{aligned}$$

* การพิสูจน์ทฤษฎีบทของเลอว์คดูภาคผนวก

$$= cf(x)$$

$$= cL^{-1} [F(s)] \quad \square$$

ตัวอย่าง 5.3.2 จงหาการแปลงผกผันลาปลาซของ

$$(ก) \frac{6}{(s+2)^2 + 9}$$

$$(ข) \frac{12}{(s+3)^4}$$

$$(ค) \frac{s+3}{s^2+2s+5}$$

$$(ง) \frac{1}{(s-a)(s-b)}, \quad a \neq b$$

วิธีทำ

$$ก. \text{ เนื่องจาก } \frac{6}{(s+2)^2 + 9} = 2 \frac{3}{(s+2)^2 + 3^2}$$

$$\text{และ } L^{-1} \left[\frac{3}{s^2 + 3^2} \right] = \sin 3x$$

$$\text{ดังนั้น } L^{-1} \left[\frac{6}{(s+2)^2 + 9} \right] = 2e^{-2x} \sin 3x$$

$$ข. \text{ เนื่องจาก } \frac{12}{(s+3)^4} = 2 \frac{3!}{(s+3)^4}$$

$$\text{และ } L^{-1} \left[\frac{3!}{s^4} \right] = x^3$$

$$\text{ดังนั้น } L^{-1} \frac{12}{(s+3)^4} = 2e^{-3x} x^3$$

$$ค. \text{ เนื่องจาก } \frac{s+3}{s^2+2s+5} = \frac{s+3}{s^2+2s+1+4} = \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + \frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$

$$\text{ดังนั้น } L^{-1} \left[\frac{s+3}{s^2+2s+5} \right] = L^{-1} \left[\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} \right] + L^{-1} \left[\frac{2}{(s+1)^2+2^2} \right]$$

$$= e^{-x} \cos 2x + e^{-x} \sin 2x$$

$$ง. \frac{1}{(s-a)(s-b)} = \frac{1}{(a-b)} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b} \right), \quad a \neq b$$

$$\text{ดังนั้น } L^{-1} \left[\frac{1}{(s-a)(s-b)} \right] = \frac{1}{(a-b)} (e^{ax} - e^{bx})$$

5.4 การแก้สมการเชิงอนุพันธ์โดยใช้ผลการแปลงลาปลาซ

ข้อจำกัด ต้องเป็นสมการที่กำหนดเงื่อนไขต้นที่ 0

คำตอบต้องเป็นฟังก์ชันในกำกับของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

ผล คำตอบเป็นคำตอบเฉพาะของสมการนั้น

ทฤษฎีบทประกอบ 5.4.1 ถ้า y เป็นฟังก์ชันในกำกับของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล Me^{cx} และ $s > c$ จะได้ $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-sx} y(x) = 0$

พิสูจน์ เนื่องจาก y อยู่ในกำกับของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล จะมีจำนวนจริง a และ $M > 0$

$$\text{เมื่อ } x > a \quad \text{เราได้ว่า } |y(x)| \leq Me^{cx}$$

$$\text{ดังนั้น } e^{-sx} |y(x)| \leq Me^{-(s-c)x}$$

$$\text{และ } 0 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-sx} |y(x)| \leq M \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-(s-c)x} = 0 \quad \text{เมื่อ } s > c$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-sx} y(x) = 0 \quad \square$$

สังกัทรทรพในกรแก้สมการโดยใช้ผลกรเปลงลาปลตข

1. ผลกรเปลงลาปลตขของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

$$1.1 \quad L[y'] = sL[y] - y(0), \quad y = y(x)$$

1.2 ผลกรขยย 1.1 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้

$$\begin{aligned} L[y^{(n)}] &= s^n L[y] - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} y'(0) - \dots - y^{(n-1)}(0) \\ &= s^n L[y] - \sum_{k=1}^n s^{k-1} y^{(n-k)}(0) \quad (\text{รูปย่อ}) \end{aligned}$$

พิสูจน์ 1.1

$$\begin{aligned} L[y'] &= \int_0^\infty e^{-sx} y' dx \\ &= [e^{-sx} y(x)]_{x=0}^\infty + s \int_0^\infty y e^{-sx} dx \quad (\text{การอินทิเกรตทีละส่วน}) \\ &= -y(0) + sL(y) \quad (y \text{ อยู่ในกำกับของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล}) \end{aligned}$$

พิสูจน์ 1.2 ใช้การอุปนัยทางคณิตศาสตร์บนอันดับ n ของ y

ให้ $P(n)$ แทนประโยค

$$L[y^{(n)}] = s^n L[y] - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} y'(0) - \dots - y^{(n-1)}(0)$$

$$\text{เราทราบว่า } L[y'] = sL[y] - y(0)$$

$$\text{ดังนั้น } P(1) \text{ เป็นจริง} \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{ถ้า } L[y^{(k)}] = s^k L[y] - s^{k-1} y(0) - s^{k-2} y'(0) - \dots - y^{(k-1)}(0)$$

$$\text{จะได้ } L[y^{(k+1)}] = sL[y^{(k)}] - y^{(k)}(0)$$

$$= s[s^k L[y] - s^{k-1} y(0) - s^{k-2} y'(0) - \dots - y^{(k-1)}(0)] - y^{(k)}(0)$$

$$= s^{k+1} L[y] - s^k y(0) - s^{k-1} y'(0) - \dots - y^{(n)}(0)$$

ดังนั้น ถ้า $P(k)$ จริง จะได้ $P(k+1)$ จริง (2)

จาก (1) และ (2) เราจะได้โดยหลักการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ว่าสูตร 1.2

เป็นจริง $\square$

ตัวอย่าง 5.4.1 จงหา $L[y'']$

$$L[y''']$$

$$L[y^{(4)}]$$

$$L[y'' + ay' + by]$$

วิธีทำ

$$L[y''] = s^2 L[y] - sy(0) - y'(0)$$

$$L[y'''] = s^3 L[y] - s^2 y(0) - sy'(0) - y''(0)$$

$$L[y^{(4)}] = s^4 L[y] - s^3 y(0) - s^2 y'(0) - sy''(0) - y'''(0)$$

$$L[y'' + ay' + by] = L[y''] + aL[y'] + bL[y]$$

$$= s^2 L[y] - sy(0) - y'(0) + a(sL[y] - y(0)) + bL[y]$$

$$= (s^2 + as + b)L[y] - (s + a)y(0) - y'(0)$$

ตัวอย่าง 5.4.2 จงแก้สมการ

$$y'' + 4y = 4x$$

กำหนด $y(0) = 1$ และ $y'(0) = 5$

วิธีทำ

จากโจทย์

$$L[y''] + 4L[y] = 4L[x]$$

$$s^2 L[y] - sy(0) - y'(0) + 4L[y] = \frac{4}{s^2}$$

$$s^2 L[y] - s \cdot 1 - 5 + 4L[y] = \frac{4}{s^2}$$

$$(s^2 + 4)L[y] = s + 5 + \frac{4}{s^2}$$

$$L[y] = \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{5}{s^2 + 4} + \frac{4}{s^2(s^2 + 4)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{s}{s^2+4} + \frac{5}{s^2+4} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+4} \\
 &= \frac{s}{s^2+4} + \frac{4}{s^2+4} + \frac{1}{s^2}
 \end{aligned}$$

$$\therefore y = \cos 2x + 2 \sin 2x + x \quad \text{Ans}$$

จงสังเกตขั้นตอนการแก้สมการ

1. แปลงสมการเชิงอนุพันธ์ เป็นสมการที่มี $L[y]$
2. หา $L[y]$
3. แปลงกลับเพื่อหา y

2. คุณสมบัติเพิ่มเติมของผลการแปลงลาปลาซ

ตัวอย่าง 5.4.3 จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $xf(x)$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ } F(s) = L[f(x)] &= \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \\
 \frac{d}{ds} F(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} e^{-sx} f(x) dx \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-sx} (-x) f(x) dx \\
 &= - \int_0^{\infty} e^{-sx} xf(x) dx
 \end{aligned}$$

$$\therefore \int_0^{\infty} e^{-sx} xf(x) dy = -F'(s)$$

$$\text{หรือ } L[xf(x)] = -F'(s)$$

ข้อสังเกตจากตัวอย่าง 5.4.3 สามารถขยายได้ว่า

$$L[x^n f(x)] = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

ตัวอย่าง 5.4.4 จงหาผลการแปลงลาปลาซของ

ก. $x \sin ax$

ข. $x^2 \cos ax$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ } \text{ก. } \text{เนื่องจาก } L[\sin ax] &= \frac{a}{s^2+a^2} \\
 \text{จะได้ } L[x \sin ax] &= -\frac{d}{ds} \left(\frac{a}{s^2+a^2} \right) = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2} \\
 \text{ข. } \text{เนื่องจาก } L[\cos ax] &= \frac{s}{s^2+a^2} \\
 \text{จะได้ } L[x^2 \cos ax] &= \frac{d^2}{ds^2} \left[\frac{s}{s^2+a^2} \right] \\
 &= \frac{d}{ds} \frac{a^2-s^2}{(s^2+a^2)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(s^2 + a^2)^2 (-2s) - 2(a^2 - s^2)(s^2 + a^2)2s}{(s^2 + a^2)^4} \\
 &= \frac{-2s^3 - 2a^2s - 4a^2s + 4s^3}{(s^2 + a^2)^3} \\
 &= \frac{2s(2s^2 - 3a^2)}{(s^2 + a^2)^3}
 \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 5.4.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันในกำกับของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและ

$L[f(x)] = F(s)$ จะได้

$$L\left[\int_0^x f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s}$$

พิสูจน์ $L\left[\int_0^x f(t) dt\right] = \int_0^\infty e^{-sx} \left(\int_0^x f(t) dt\right) dx$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-sx} \int_0^x f(t) dt \right]_{x=0}^T + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx$$

โดยการอินทิเกรตที่ละส่วนและทฤษฎีบทพื้นฐานของแคลคูลัส

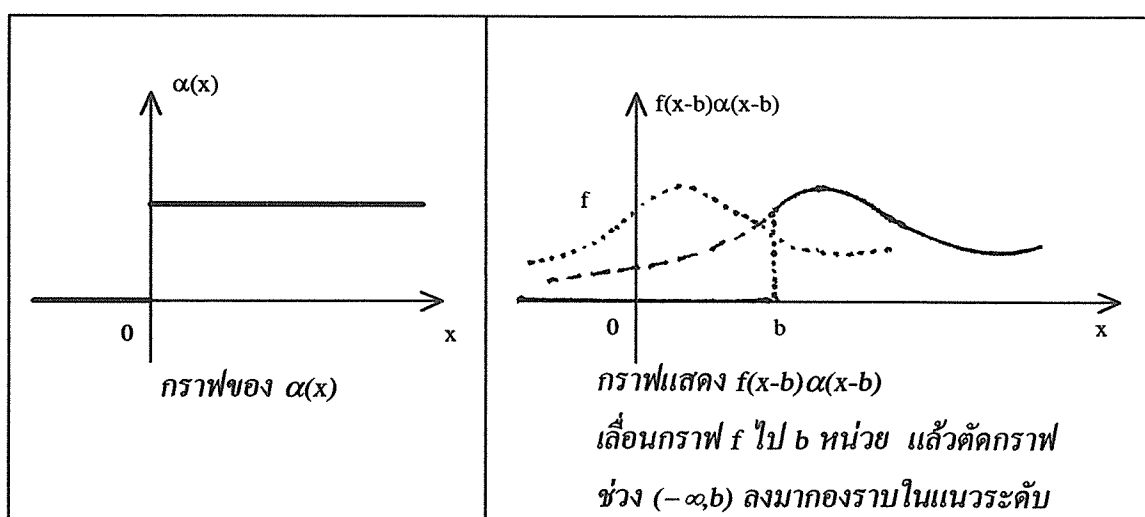
$$= 0 + \frac{F(s)}{s}$$

$\therefore \int_0^x f(t) dt$ อยู่ในกำกับของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล $\square$

ทฤษฎีบท 5.4.3 ถ้า $L^{-1}[F(s)] = f(x)$ จะได้

$$L^{-1}[e^{-sb} F(s)] = f(x-b) \alpha(x-b)$$

$$\text{โดย } \alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } x < 0 \\ 1 & \text{เมื่อ } x \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
 \text{พิสูจน์} \quad \text{เนื่องจาก } L[\alpha(x-b)f(x-b)] &= \int_0^{\infty} e^{-sx} \alpha(x-b)f(x-b) dx \\
 &= \int_b^{\infty} e^{-sx} f(x-b) dx, \text{ คุณสมบัติของ} \\
 &\quad \text{ฟังก์ชัน } \alpha \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-s(t+b)} f(t) dt, t = x - b \\
 &= e^{-sb} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\
 &= e^{-sb} F(s)
 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } L^{-1}[e^{-sb}F(s)] = \alpha(x-b)f(x-b) \quad \square$$

ตัวอย่าง 5.4.5 จงหาผลการแปลงผกผันลาปลาซของ

ก. $\frac{5e^{-3s}}{s}$

ข. $\frac{e^{-4s}}{(s+2)^3}$

วิธีทำ

ก. เพราะว่า $L^{-1}\left[\frac{5}{s}\right] = f(x) = 5$

จะได้ว่า $f(x-3) = 5$

และ $L^{-1}\left[\frac{5e^{-3s}}{s}\right] = 5\alpha(x-3) \begin{cases} 0, & x < 3 \\ 5, & x \geq 3 \end{cases}$

ข. เพราะว่า $L^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^3}\right] = f(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-2x}$

ดังนั้น $f(x-4) = \frac{1}{2}(x-4)^2e^{-2(x-4)}$

และ $L^{-1}\left[\frac{e^{-4s}}{(s+2)^3}\right] = \frac{1}{2}(x-4)^2e^{-2(x-4)}\alpha(x-4)$

แบบฝึกหัด 5.1

1. ฟังก์ชันใดต่อไปนี้ต่อเนื่องเป็นตอน ๆ บนช่วง $[0, T]$, สำหรับทุก $T > 0$

ก. e^{t^2}

ข. $\ln(t+1)$

ค. $\frac{t+1}{t-1}$

ง. $\frac{t-2}{t^2-t-2}$

จ. $e^{1/t}$

ฉ. $f(t) = [t]$, จำนวนเต็มโตที่สุดที่ $\leq t$

ช. $f(t) = \begin{cases} 0, & t \text{ เป็นจำนวนเต็ม} \\ 1, & \text{ณ. ที่อื่น ๆ} \end{cases}$

2. จงหาผลการแปลงลาปลาซของ

ก. $3e^{-4x}$

ข. $2x^2$

ค. $4 \cos 5x$

ง. $\sin \pi x$

จ. $\frac{-3}{\sqrt{x}}$

ฉ. $e^{-x}(5 \sin 2x + 3 \cos 2x)$

ช. $f(t) = \begin{cases} t, & t < 2 \\ 2, & t > 2 \end{cases}$

ซ. $f(t) = \begin{cases} \sin t, & t < 2\pi \\ 0, & t > 2\pi \end{cases}$

ฌ. $\int_0^t te^{2t} \sin t \, dt$

ญ. $e^{-3t} \int_0^t t \cos 4t \, dt$

3. จงพิสูจน์ว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันในกำกับของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล และเป็นฟังก์ชัน

มีคาบ p จะได้ $L[f] = \frac{\int_0^p e^{-sx} f(x) dx}{1 - e^{-ps}}$

4. จงหาผลการแปลงผกผันลาปลาซ

ก. $\frac{1}{s^2 + 2s + 5}$

ข. $\frac{s}{s^2 + 2s + 5}$

ค. $\frac{s}{s^2 + 8s + 16}$

ง. $\frac{s}{s^2 - 6s + 8}$

จ. $\frac{2s-1}{s^2 + 4s + 29}$

ฉ. $\frac{s^2}{(s+2)^3}$

ช. $\frac{3e^{-2s}}{3s^2 + 1}$

ซ. $\frac{1+e^{-s}}{s}$

ฌ. $\frac{1}{s^3 + a^3}$

ญ. $\frac{s^2}{s^3 + a^3}$

ฎ. $\ln \frac{s+3}{s+2}$ [ข้อแนะ : $\frac{d}{ds} \ln \frac{s+3}{s+2} = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$]

ฏ. $\ln \frac{s^2+1}{s(s+3)}$

5. จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น โดยใช้ผลการแปลงลาปลาซ

ก. $y'' - 4y' + 4y = 0$; $y(0) = y'(0) = 1$

ข. $y'' + 3y' = 0$; $y(0) = -2$, $y'(0) = -3$

ค. $y'' - 2y' - 3y = 2e^{-x}$; $y(0) = \frac{3}{2}$, $y'(0) = 2$

ง. $y^{(4)} + y'' = \sin 2x$; $y(0) = 5$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 8$, $y'''(0) = 0$

จ. $x'' + 4x' + 4x = 4e^{-2t}$; $x(0) = -1$, $x'(0) = 4$

ฉ. $D^2 y - Dy - 2y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$

ช. $D^3 y - D^2 y - Dy + y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 4$

ซ. $D^2 y - 3Dy + 2y = 1 - 4x + 2x^2$; $y(0) = 4$, $Dy(0) = 5$

ฌ. $D^2 y - 4Dy + 3y = 6e^{4x}$; $y(0) = 2$, $Dy(0) = 6$

$$\text{ญ. } D^2 y - 2Dy + y = 6xe^x ; y(0) = 1 , Dy(0) = 0$$

$$\text{ฎ. } D^2 y + 4y = 10 \sin 3x - 5 \cos 3x ; y(0) = 2 , Dy(0) = -4$$

$$\text{ฏ. } D^2 y + 9y = 6 \cos 3x ; y(0) = 0 , Dy(0) = 3$$

$$\text{ฐ. } D^2 y - 2Dy + 2y = 2e^x \sin x ; y(0) = y'(0) = 0$$

$$\text{ท. } x'' + 4x = f(t) , t \geq 0$$

$$\text{เมื่อ } f(t) = \begin{cases} 4t , & 0 \leq t \leq 1 \\ 4 , & t > 1 \end{cases}$$

$$\text{และ } x(0) = x'(0) = 0$$

คำตอบแบบฝึกหัด 5.1

$$1. \quad \text{ก., ข., ง., จ., ฉ., ช.}$$

$$2. \quad \begin{array}{lll} \text{ก. } \frac{3}{s+4} & \text{ข. } \frac{3}{s^3} & \text{ค. } \frac{4s}{s^2+25} \\ \text{ง. } \frac{\pi}{s^2+\pi^2} & \text{จ. } -3\frac{\pi}{\sqrt{s}} & \text{ฉ. } \frac{3s+13}{s^2+2s+5} \\ \text{ช. } \left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}\right)e^{-2s} & \text{ฎ. } \frac{1-e^{-2\pi s}}{s^2+1} & \text{ฏ. } \frac{2(s-2)}{s[(s-2)^2+1]^2} \\ \text{ญ. } \frac{(s+3)^2-16}{(s+3)((s+3)^2+16)^2} \end{array}$$

$$4. \quad \begin{array}{ll} \text{ก. } \frac{1}{2}e^{-x} \sin 2x & \text{ข. } e^{-x}(\cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{ค. } e^{-4x}(1-4x) & \text{ง. } e^{3x}(\cosh x + 3\sinh x) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{จ. } e^{-2x}(2 \cos 5x - \sin 5x) & \text{ฉ. } e^{-2x}(1-4x+2x^2) \end{array}$$

$$\text{ช. } \sqrt{3} \alpha(t-2) \sin \frac{1}{\sqrt{3}}(t-2) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } t \leq 2 \\ \sqrt{3} \sin \frac{1}{\sqrt{3}}(t-2) & \text{ถ้า } t > 2 \end{cases}$$

$$\text{ฎ. } 1 + \alpha(t) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } t < 1 \\ 2 & \text{ถ้า } t \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{ฏ. } \frac{1}{3a^2}e^{-at} - \frac{1}{3a^2}e^{at/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}at + \frac{4\sqrt{3}}{9a^2}e^{at/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}at$$

- ญ. $\frac{1}{3}e^{-at} + \frac{2}{3}e^{at/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} at$
 ฉ. $\frac{1}{t} (e^{-2t} - e^{-3t})$
 ญ. $\frac{-2}{9t} + \frac{1}{3} + \frac{2e^{-5t}}{9t} - \frac{8}{3} - e^{-3t}$
 5. ก. $y = e^{2x} - xe^{2x}$ ข. $y = e^{-3x} - 3$
 ก. $y = e^{3x} + \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}xe^{-x}$ ง. $y = 3 + 2x + e^{2x} + e^{-2x}$
 จ. $x = e^{-2t}(2t^2 + 2t - 1)$ ฉ. $y = 2e^{-2x} - e^{-x}$
 ช. $y = e^{-x} + e^x + xe^x$ ช. $y = 2e^x + e^{2x} + 1 + x + x^2$
 ฌ. $y(x) = e^x - e^{3x} + 2e^{4x}$ ญ. $y(x) = e^x - xe^x + x^3 e^x$
 ญ. $y = \cos 2x + \sin 2x + \cos 3x - 2 \sin 3x$
 ญ. $y = \sin 3x + x \sin 3x$
 ฐ. $y = e^x (\sin x - x \cos x)$
 ท. $x(t) = \cos 2t + t - \frac{1}{2} \sin 2t - [(t-1) - \frac{1}{2} \sin 2(t-1)] \alpha(t-1)$

บทที่ 6

คำตอบในรูปอนุกรม

6.1 บทนำ

พิจารณาสมการ

$$y' = x^2 + y^2$$

$$xy'' - y' + xy = 0$$

เราไม่สามารถแก้สมการทั้งสองในรูปฟังก์ชันเบื้องต้น* ที่ปรากฏในวิชาแคลคูลัสได้ เราอาจนึกเสียดายที่ทั้ง ๆ ที่ทราบว่า เมื่อกำหนดเงื่อนไขต้นที่เหมาะสมบางประการ สมการทั้งสองนี้จะมีคำตอบเดียว แต่ไม่สามารถระบุคำตอบตามต้องการได้ แท้จริงปัญหานี้ไม่สิ้นหวังที่จะแก้ที่เดียวหากทราบว่าคำตอบหาอนุพันธ์ได้ไม่สิ้นสุด ณ บางค่าของ x ในวิชาแคลคูลัส ฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ไม่สิ้นสุด ณ จุด a จะสามารถเขียนในรูปอนุกรมยกกำลัง

$$y(a) + \frac{y'(a)(x-a)}{1!} + \frac{y''(a)(x-a)^2}{2!} + \dots + \frac{y^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + \dots$$

ซึ่งฟังก์ชันนี้จะมีนิยามในช่วงช่วงหนึ่งที่มี a เป็นศูนย์กลาง และ ณ ทุกจุดในช่วงนั้นฟังก์ชันจะมีอนุพันธ์ทุกอันดับ เมื่อเราหาอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ของ

$$y' = x^2 + y^2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{จะได้ } y'' = 2x + 2yy' \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{และ } y''' = 2 + 2yy'' + 2(y')^2 \quad \dots\dots\dots (3)$$

* ฟังก์ชันเบื้องต้น (elementary functions) ได้แก่

1. ฟังก์ชันพีชคณิต
 2. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
 3. ฟังก์ชันที่เป็นอินเวอร์สฟังก์ชันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
 4. ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล
 5. ฟังก์ชันลอการิทึม
 6. ฟังก์ชันอื่น ๆ ที่ประกอบจากฟังก์ชัน หัวข้อ 1 – 5 โดยวิธีการประกอบฟังก์ชันหรือการใช้โอเปอเรชันทางพีชคณิต ซึ่งขั้นตอนของการประกอบฟังก์ชันเป็นจำนวนจำกัด
- เช่น $f(x) = \sin 3^{\log \sqrt{x^2-1}}$ เป็นฟังก์ชันเบื้องต้น

$$y^{(4)} = 6y' y'' + 2y y''' \dots\dots\dots (4)$$

$$y^{(5)} = 6(y'')^2 + 8y' y''' + 2yy^{(4)} \dots\dots\dots (5)$$

.....

ในกรณีที่กำหนดค่า y ณ $x = a$ เราจะทราบค่า y' จาก (1) และจะทราบค่า y'' , y''' , ... โดยการแทนค่าที่เราทราบแล้วในสมการถัดไป เช่น เมื่อกำหนดค่า $y(0) = 1$ เราจะได้ต่อไปว่า

$$y'(0) = 1, y''(0) = 2, y'''(0) = 8, y^{(4)}(0) = 28, y^{(5)}(0) = 144, \dots$$

ในรูปอนุกรม

$$y = 1 + x + \frac{2x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{28x^4}{4!} + \frac{144x^5}{5!} + \dots$$

เราจึงมีความหวังว่าทางออกในการเขียนคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ทางหนึ่ง คือ เขียนคำตอบในรูปอนุกรม

ปัญหาที่ต้องพิจารณา

ปัญหา 1 จะหาช่วงแห่งการลู่อเข้าของคำตอบได้หรือไม่?

คำตอบในรูปอนุกรมดังกล่าวข้างต้น 1 ที่ปัญหาไว้ กล่าวคือ เราไม่สามารถหาสัมประสิทธิ์พจน์ที่ n โดยทั่วไปได้ จึงไม่สามารถกำหนด ช่วงแห่งการลู่อเข้า (interval of convergence) เป็นโดเมนของคำตอบได้ ปัญหานี้เราแก้ได้โดยใช้ทฤษฎีบทการมีคำตอบ เมื่อสัมประสิทธิ์เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ (analytic function)

บทนิยาม 6.1.1 ให้ g เป็นฟังก์ชัน g จะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ณ จุด x_0 ก็ต่อเมื่อสามารถเขียน g ในรูปอนุกรมยกกำลังรอบจุด x_0 มีรัศมีมีการลู่อเข้าเป็นบวก ดังนี้

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$$

เมื่อ c_k คงค่า และอนุกรมคอนเวอร์จ เมื่อ $|x - x_0| < r_0$ สำหรับจำนวนบวก r_0 บางจำนวน

ข้อสังเกต

- 1) ตัวอย่างฟังก์ชันวิเคราะห์ได้แก่ พหุนาม, $\sin x$, $\cos x$, e^x เป็นต้น
- 2) ฟังก์ชันตรรกยะ $\frac{p(x)}{q(x)}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ณ จุด x_0 ใด ๆ ที่ $g(x_0) \neq 0$
- 3) ฟังก์ชันวิเคราะห์หาอนุพันธ์ได้ไม่สิ้นสุด และจะคอนเวอร์จในช่วง $|x - x_0| < r_0$ เดียวกัน

ทฤษฎีบท 6.1.1 (ทฤษฎีบทการมีคำตอบเมื่อสัมประสิทธิ์เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์)

กำหนดให้ x_0 เป็นจำนวนจริง และสัมประสิทธิ์ $a_1, a_2, \dots, a_n$ ใน

$$Ly = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y$$

สามารถกระจายเป็นอนุกรมยกกำลังของ $x - x_0$ ในช่วง $|x - x_0| < r_0$

หนึ่งกำหนด $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ เป็นตัวคงค่า

จะได้ว่า มีคำตอบ ϕ ของสมการเชิงอนุพันธ์พร้อมเงื่อนไขต้น

$$Ly = 0, \quad y(x_0) = \alpha_1, \quad y'(x_0) = \alpha_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_n$$

ซึ่งกระจายเป็นอนุกรมในรูป $\phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$ ที่มีช่วงการลู่อเข้า

$$|x - x_0| < r_0 \text{ เดียวกัน}$$

นอกจากนี้ เมื่อ $k = 0, 1, \dots, n-1$ ได้ $c_k = \frac{\alpha_{k+1}}{k!}$,

เมื่อ $k \geq n$ ค่า c_k คำนวณได้จาก $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ โดยแทน

อนุกรม $\phi(x)$ ใน $Ly = 0$

ดูการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ในบรรณานุกรมเล่มที่ 6 แต่งโดย Coddington

ปัญหา 2 มีคำตอบแบบอนุกรมยกกำลังผ่านจุดโคดเดียวหรือไม่?

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$$

เมื่อ $p(x), q(x)$ และ $r(x)$ เป็นพหุนาม หาค่า y'' ได้เป็น

$$y'' = -\frac{q(x)y' + r(x)y}{p(x)}$$

ถ้าเราอยากให้มีคำตอบผ่านจุด $x = a$ ต้องกำหนดเงื่อนไขต้นที่ a คือค่า y, y' แต่ในกรณีที่ $p(a)$ เป็น 0 จะหาค่า y'' ไม่ได้ ในกรณีนี้ค่า a ที่ทำให้ $p(a) = 0$ ดังกล่าวเรียกว่าจุดโคดเดียว (singular point) เป็นกรณีที่ใช้ทฤษฎีบท 1 ข้างต้นไม่ได้ จึงไม่มีคำตอบแบบอนุกรมยกกำลังผ่านจุดโคดเดียว กรณีที่กำหนดเงื่อนไขต้น ณ จุดโคดเดียว จะมีคำตอบอนุกรมอีกแบบหนึ่งรอบจุดโคดเดียว เราเรียกว่า คำตอบแบบโฟรเบนิอุส (Frobenius) ซึ่งเราจะได้ศึกษาต่อไป

ปัญหา 3 ถ้าไม่กำหนดเงื่อนไขต้น มีทางหาคำตอบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ในรูป

อนุกรมยกกำลังได้เสมอไปหรือไม่?

คำตอบคือ ได้โดยการให้รูปคำตอบเป็นอนุกรมยกกำลัง

$$y = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

ซึ่ง a ไม่ใช่จุดโคดเคียวลงในสมการ $Ly = 0$ และอนุกรมที่ได้จะมีรัศมีการลู่เข้าเท่ากับระยะห่างจาก a ถึงจุดโคดเคียวที่ใกล้ที่สุด ดูวิธีการหาคำตอบในหัวข้อ 6.2

6.2 ตัวอย่างการหาคำตอบในรูปอนุกรมยกกำลัง

ตัวอย่างต่อไปนี้ ส่วนใหญ่จะกล่าวถึงสมการในรูป

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

โดยที่ P, Q, R เป็นพหุนาม และอนุกรมกระจายรอบจุดธรรมดา a (หมายถึงจุดที่มีใช้จุดโคดเคียว อีกนัยหนึ่งคือ $P(a) \neq 0$)

6.2.1 วิธีหาอนุพันธ์ต่อ ๆ กันไป (method of successive differentiation)

ใช้กับสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดเงื่อนไขต้นที่จุดธรรมดา

ตัวอย่าง 6.2.1 จงแก้สมการ $y'' = e^{-x}y' + e^{-x}y^2 - 1$ ซึ่ง $y = 1, y' = 1$ เมื่อ $x = 0$

วิธีทำ หาอนุพันธ์ต่อ ๆ กัน จากโจทย์ จะได้

$$y''' = e^{-x}(y'' - y' + 2yy' - y^2)$$

$$y^{(4)} = e^{-x}[y''' - 2y'' + y' + 2(yy'' + (y')^2) - 4yy'y + y^2]$$

เมื่อ $x = 0$ ได้ $y = 1$ และ $y' = 1$

ดังนั้น $y'' = 1, y''' = 1, y^{(4)} = 1$

$$\text{และ } y = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$= e^x$$

ตัวอย่าง 6.2.2 จงแก้สมการ $xy'' + x^3y' - 3y = 0$ ซึ่ง $y = 0, y' = 2$ เมื่อ $x = 1$

วิธีทำ จากโจทย์หาค่า y'' แล้วหาอนุพันธ์ต่อ ๆ กันไป ดังนี้

$$y'' = -x^2y' + 3x^{-1}y$$

$$y''' = -x^2y'' - (2x - 3x^{-1})y' - 3x^{-2}y$$

$$y^{(4)} = -x^2y''' - (4x - 3x^{-1})y'' - (2 + 6x^{-2})y' + 6x^{-3}y$$

ณ $x = 1$ เราได้ $y = 0, y' = 2$

เพราะฉะนั้น $y''(1) = -2$, $y'''(1) = 4$, $y^{(4)}(1) = -18$, ...

ดังนั้นคำตอบคือ

$$\begin{aligned} y &= y(1) + y'(1)(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{y^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 + \dots \\ &= 0 + 2(x-1) - \frac{2}{2!}(x-1)^2 + \frac{4}{3!}(x-1)^3 - \frac{18}{4!}(x-1)^4 + \dots \\ &= 2(x-1) - (x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3 - \frac{3}{4}(x-1)^4 + \dots \end{aligned}$$

ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีได้กำหนดเงื่อนไขเพิ่มเติม เราแก้ได้โดยกำหนดเงื่อนไขเพิ่มเติมที่จุดปกติในรูปทั่วไป และจะได้คำตอบในรูปทั่วไป ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.2.3 จงแก้สมการ $y'' = xy$

วิธีทำ หาอนุพันธ์จากสมการโจทย์ต่อ ๆ กันไปได้

$$\begin{aligned} y''' &= xy' + y, \quad y^{(4)} = xy'' + 2y', \\ y^{(5)} &= xy''' + 3y'', \quad y^{(6)} = xy^{(4)} + 4y''', \\ &\dots \end{aligned}$$

สมมติเมื่อ $x = 0$ ได้ $y = c_1$, $y' = c_2$ จะได้

$$y''(0) = 0, y'''(0) = c_1, y^{(4)}(0) = 2c_2, y^{(5)}(0) = 0, y^{(6)}(0) = 4c_1, \dots$$

ดังนั้นคำตอบคือ

$$\begin{aligned} y &= y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)x^2}{2!} + \frac{y'''(0)x^3}{3!} + \frac{y^{(4)}(0)x^4}{4!} + \frac{y^{(5)}(0)x^5}{5!} + \frac{y^{(6)}(0)x^6}{6!} + \dots \\ &= c_1 + c_2x + \frac{c_1x^3}{3!} + \frac{2c_2x^4}{4!} + \frac{4c_1x^6}{6!} + \dots \\ &= c_1 \left(1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{4x^6}{6!} + \dots\right) + c_2 \left(x + \frac{2x^4}{4!} + \frac{10x^7}{7!} + \dots\right) \end{aligned}$$

6.2.2 วิธีเทียบสัมประสิทธิ์ (method of undetermined coefficients)

วิธีนี้เราเริ่มต้นสมมติให้คำตอบในรูปอนุกรมรอบจุดธรรมดา a คือ

$$y = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + \dots$$

จากนั้นหาอนุพันธ์ $y', y'' \dots$ แล้วไปแทนค่าในสมการ $Ly = 0$ จะได้สมการ

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x-a)^n = 0 \quad \text{ซึ่งสัมประสิทธิ์ } A_n \text{ ทุกตัวในสมการที่ได้ใหม่จะเป็น } 0 \text{ และได้}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ c_n ของสมการเดิมจาก $A_n = 0$ วิธีนี้ใช้กับสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่ได้กำหนดเงื่อนไขเพิ่มเติม และจะได้คำตอบเป็นคำตอบทั่วไป

ตัวอย่าง 6.2.4 จงแก้สมการ $(x^2 - 1)y'' - 2xy' - 4y = 0$ (1)

วิธีทำ ให้คำตอบกระจายรอบจุด 0 (ที่เลือก 0 เพราะเป็นจุดธรรมดาที่ง่ายที่สุด) เป็น

$$\begin{aligned} y &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots \\ \text{จะได้} \quad y' &= c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \dots \\ y'' &= 2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + 20c_5x^3 + \dots \end{aligned}$$

แทนค่า y, y', y'' ใน (1) เพื่อความสะดวกในการจัดสัมประสิทธิ์ ขอใช้ตาราง

	0	x	x ²	x ³	x ⁴	...
$x^2 y''$			$2c_2$	$6c_3$	$12c_4$	...
$-y''$	$-2c_2$	$-6c_3$	$-12c_4$	$-20c_5$	$-30c_6$	...
$-2xy'$		$-2c_1$	$-4c_2$	$-6c_3$	$-8c_4$	...
$-4y$	$-4c_0$	$-4c_1$	$-4c_2$	$-4c_3$	$-4c_4$	...
$(x^2 - 1)y'' - 2xy' - 4y$	0	0	0	0	0	0

ตารางแสดงสัมประสิทธิ์ของ x กำลังต่าง ๆ เกิดจากค่าทางซ้ายมือของ (1)

$$\begin{aligned} \text{จากตาราง} \quad 2c_2 + 4c_0 &= 0 & \text{ได้} \quad c_2 &= -2c_0 \\ 6c_3 + 6c_1 &= 0 & \text{ได้} \quad c_3 &= -c_1 \\ 12c_4 + 6c_2 &= 0 & \text{ได้} \quad c_4 &= -\frac{1}{2}c_2 = c_0 \\ 20c_5 + 4c_3 &= 0 & \text{ได้} \quad c_5 &= -\frac{1}{5}c_3 = \frac{1}{5}c_1 \\ 30c_6 + 0c_4 &= 0 & \text{ได้} \quad c_6 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้นเราได้คำตอบ} \quad y &= c_0 + c_1x - 2c_0x^2 - c_1x^3 + c_0x^4 + \frac{1}{5}c_1x^5 + 0x^6 + \dots \\ &= c_0(1 - 2x^2 + x^4 - \dots) + c_1(x - x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \dots) \end{aligned}$$

สำหรับวิธี 6.2.2 นี้ เราหาจนทั่วไปได้โดยใช้สัญลักษณ์ Σ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.2.5 (Hermite's equation) จงแก้สมการ $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$ (λ ค่าคงที่)

วิธีทำ ให้คำตอบในรูปอนุกรมรอบจุด 0 คือ $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

$$\text{จะได้} \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \text{ และ } y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

แทนค่า y, y', y'' ในสมการโหทัยจะได้

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} -2nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda c_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} -2nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda c_n x^n \\
&= (2c_2 + \lambda c_0) + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} - 2nc_n + \lambda c_n] x^n
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น จะได้สัมประสิทธิ์ $2c_2 + \lambda c_0 = 0$ และ $(n+2)(n+1)c_{n+2} - (2n - \lambda)c_n = 0$

$$\text{ดังนั้น } c_2 = -\frac{\lambda c_0}{2} \quad \text{และ} \quad c_{n+2} = \frac{(2n - \lambda)c_n}{(n+2)(n+1)}$$

ดังนั้น c ที่กำกับด้วยครรชนีจำนวนคู่ จะเป็นผลคูณของ c_0 และที่กำกับด้วยครรชนี

จำนวนคี่จะเป็นผลคูณของ c_1 ดังต่อไปนี้

$$c_2 = -\frac{\lambda c_0}{2}$$

$$c_4 = \frac{(4-\lambda)c_2}{3 \cdot 4} = -\frac{(4-\lambda)\lambda c_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$c_6 = \frac{(8-\lambda)c_4}{5 \cdot 6} = -\frac{(8-\lambda)(4-\lambda)\lambda c_0}{6!}$$

$$c_{2n} = -\frac{\prod_{k=1}^n [(4(k-1) - \lambda)] c_0}{(2n)!}$$

$$c_3 = \frac{(2-\lambda)}{3 \cdot 2} c_1$$

$$c_5 = \frac{(6-\lambda)}{5 \cdot 4} c_3 = \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!} c_1$$

$$c_7 = \frac{(10-\lambda)}{7 \cdot 6} c_5 = \frac{(10-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda)}{7!} c_1$$

$$c_{2n-1} = \frac{\prod_{k=1}^n [(4k-2-\lambda)] c_1}{(2n-1)!}$$

เพราะฉะนั้นคำตอบคือ

$$\begin{aligned}
y &= c_0 \left[1 - \frac{\lambda x^2}{2!} - \frac{\lambda(4-\lambda)x^4}{4!} - \frac{\lambda(4-\lambda)(8-\lambda)x^6}{6!} - \dots - \frac{\prod_{k=1}^n [(4(k-1) - \lambda)]}{(2n)!} x^{2n} + \dots \right] \\
&\quad + c_1 \left[x + \frac{(2-\lambda)x^3}{3!} + \frac{(2-\lambda)(6-\lambda)x^5}{5!} + \frac{(2-\lambda)(6-\lambda)(10-\lambda)x^7}{7!} + \dots + \frac{\prod_{k=1}^n [(4k-2-\lambda)]}{(2n-1)!} x^{2n-1} + \dots \right]
\end{aligned}$$

สมการแอร์มิตต์นี้เกิดขึ้นในการศึกษาการสั่นสะเทือนแบบฮาร์โมนิกในวิชาคว้นดัม เมคานิกส์ และมีข้อเท็จจริงที่น่าสนใจคือ เมื่อเลือกค่า λ เป็นจำนวนคู่ และ เลือก c_0 หรือ c_1 เป็น 0 ค่าใดค่าหนึ่งตามค่าของ λ กล่าวคือ

$$4 \mid \lambda \quad \text{เลือก} \quad c_0 = 1$$

$$c_1 = 0$$

$$4 \nmid \lambda \quad \text{เลือก} \quad c_1 = 1$$

$$c_0 = 0$$

จะได้อนุกรมจำกัด หรืออีกนัยหนึ่งได้พหุนาม ดังตาราง

c_0	c_1	x	y
1	0	0	1
0	1	2	x
1	0	4	$1 - 2x^2$
0	1	6	$x - \frac{2}{3}x^3$
1	0	8	$1 - 4x^2 + \frac{4}{3}x^4$
0	1	10	$x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5$

ถ้าไม่กล่าวถึงการคูณพหุนามเหล่านี้ด้วยตัวคงค่า (ซึ่งมักเกิดในปัญหาฟิสิกส์) เรียกพหุนามเหล่านี้ว่า พหุนามแอร์มีต (Hermite Polynomials)

แบบฝึกหัด 6.2

1. จงหาคำตอบในรูปอนุกรมยกกำลังของ $2y''' + xy'' + 2y' + xy = 0$ เมื่อ $y = 1, y' = 0, y'' = 1$ ที่ $x = 0$

2. จงหาคำตอบในรูปอนุกรมยกกำลังรอบ $x = 0$ ของสมการ $y' + y^2 - x = 0$

คำตอบแบบฝึกหัด 6.2

1. $y = \cos x$

2. $y = c - c^2 x^2 + \frac{1+2c^3}{2} x^2 - \frac{c+3c^4}{3} x^2 + \frac{5c^2+12c^5}{4} x^4 - \dots$

6.3 คำตอบแบบอนุกรมรอบจุดโดดเดี่ยวปกติ

6.3.1 จุดโดดเดี่ยวปกติ

บทนิยาม 6.3.1 กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0 \dots\dots\dots (1)$$

ซึ่งสัมประสิทธิ์ $a_0, a_1, \dots, a_n$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ณ บางจุด x_0

ถ้า $a_0(x_0) = 0$ เรียก x_0 ว่า จุดโดดเดี่ยว (singular point)

ข้อสังเกต ในกรณีที่กำหนดเงื่อนไขต้น ณ จุดโดดเดี่ยว x_0 ของสมการ (1) เราไม่สามารถใช้ทฤษฎีบทการหาคำตอบตัดสินเกี่ยวกับคำตอบนี้ได้ นอกจากนี้ ยังยากที่จะกล่าวถึงลักษณะของ

คำตอบใกล้ x_0 ด้วย แต่เรามีสมการอีกเป็นจำนวนมากที่มีจุดโคเดเดียวที่มีคุณสมบัติ “อ่อน” ลงในแง่ที่เราสามารถปรับวิธีแก้สมการที่สัมประสิทธิ์เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์มาใช้ได้ โดยจะได้คำตอบใกล้จุดโคเดเดียนั้น เรียกจุดโคเดเดียดังกล่าวนี้ว่า จุดโคเดเดียวปกติ

บทนิยาม 6.3.2 ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์ (1) สามารถเขียนได้เป็นสมการที่สมมูลกัน คือ

$$(x-a)^n y^{(n)} + b_1(x)(x-a)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + b_n(x)y = 0 \quad (2)$$

เรียกจุดโคเดเดียว a ว่า จุดโคเดเดียวปกติ (regular singular point)

ในกรณี เมื่อ $b_i(x)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์, $i = 1, \dots, n$

ข้อสังเกต ถ้า $c_i(x)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ $i = 1, 2, \dots, n$ จะได้สัมประสิทธิ์ของสมการ

$$c_0(x)(x-a)^n y^{(n)} + c_1(x)(x-a)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + c_n(x)y = 0$$

เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ a เมื่อ $c_0(a) \neq 0$ เมื่อหารด้วย $c_0(x)$ ได้

สัมประสิทธิ์ $b_k(x) = \frac{c_k(x)}{c_0(x)}$ วิเคราะห์ที่ a a เป็นจุดโคเดเดียวปกติเช่นกัน

ตัวอย่าง 6.3.1 จงกำหนดจุดโคเดเดียวในสมการต่อไปนี้ ในระนาบจำกัด

$$x(x-1)^2(x+2)y'' + x^2y' - (x^3+2x-1)y = 0$$

วิธีทำ เห็นชัดว่า จุดโคเดเดียวได้แก่ $0, 1, -2$ พิจารณา $x = 0$ จัดสมการได้เป็น

$$x^2 y'' + x \left(\frac{x^2}{(x-1)^2(x+2)} \right) y' - \frac{x(x^3+2x-1)}{(x-1)^2(x+2)} y = 0$$

$$\text{ซึ่ง } p(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2(x+2)} \text{ และ } q(x) = -\frac{x(x^3+2x-1)}{(x-1)^2(x+2)}$$

เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ณ $x = 0$

$\therefore x = 0$ เป็นจุดโคเดเดียวปกติ

ถ้าจัดสมการให้อยู่ในรูป

$$(x-1)^2 y'' + (x-1) \frac{x^2}{x(x-1)(x+2)} y' + \frac{x^3+2x-1}{x(x+2)} y = 0$$

$$p(x) = \frac{x^2}{x(x-1)(x+2)} \quad \text{ไม่ใช่ฟังก์ชันวิเคราะห์ ณ } x = 1$$

ดังนั้น $x = 1$ ไม่ใช่จุดโคเดเดียวปกติ

ทำนองเดียวกัน พิจารณาได้ว่า $x = -2$ เป็นจุดโคเดเดียวปกติ

ตัวอย่าง 6.3.2 พิจารณาจุดโคดเคี้ยวของสมการในตารางต่อไปนี้

สมการ	จุดโคดเคี้ยว	จุดโคดเคี้ยวปรกติ
1. (Airy) $y'' - xy = 0$	-	-
2. (Bessel) $x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$	0	0
3. (Chebyshev) $(1-x^2)y'' - xy' + p^2 y = 0$	1,-1	1,-1
4. (Hypergeometric) $x(1-x)y'' + [c-(a+b+1)x]y' - aby=0$	0, 1	0, 1
5. (Hermite) $y'' - 2xy' + 2py = 0$	-	-
6. (Laquerre) $xy'' + (1-x)y' + py = 0$	0	0
7. (Legendre) $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$	1,-1	1,-1
8. $x^2 y'' + y = 0$	0	0
9. $x^4 y'' + y = 0$	0	-

6.3.2 ตัวอย่างนำความคิดในการกำหนดคำตอบรอบจุดโคดเคี้ยวปรกติ

ต่อไปนี้จะให้จุดโคดเคี้ยวเป็น $x = 0$ (เพราะถ้าเป็นจุดอื่นเราย้ายแกนได้) และใช้ $x > 0$ ก่อนอื่น พิจารณาตัวอย่างที่ง่ายก่อน

ตัวอย่าง 6.3.2 (สมการของออยเลอร์) พิจารณาการแก้สมการต่อไปนี้

$$Ly = x^2 y'' + axy' + by = 0 ; a, b \text{ เป็นตัวคงค่า} \dots\dots\dots (1)$$

สมการนี้มีจุดโคดเคี้ยวปรกติ คือ $x = 0$ ตอนแรกเราแยกพิจารณากรณี $x > 0$

ก่อน เราสังเกตว่าสัมประสิทธิ์ของ $y^{(k)}$ คือ ตัวคงค่าคูณ x^k

$$\text{และสำหรับทุกจำนวนจริง } r, \quad x \frac{dx^r}{dx} = rx^r, \quad x^2 (x^r)'' = r(r-1)x^r, \dots$$

ทำให้เราได้ความคิดว่า คำตอบของ $Ly = 0$ ส่วนหนึ่งน่าจะอยู่ในรูป x^r

$$\begin{aligned} L(x^r) &= x^2 (x^r)'' + ax(x^r)' + bx^r \\ &= [r(r-1) + ar + b] x^r \\ &= q(r)x^r \text{ โดยที่ } q(r) = r(r-1) + ar + b \dots\dots\dots (*) \end{aligned}$$

(เรียก $q(r) = 0$ ว่า สมการครรชนี (idicial equation) ของสมการออยเลอร์

$$\text{และจะสังเกตว่า } q'(r) = 2r - 1 + a) \dots\dots\dots (**)$$

$$\text{ถ้า } q(r_1) = 0 \quad \text{จะได้ } L(x^{r_1}) = 0$$

$$\text{ถ้า } q(r_2) = 0 \quad \text{จะได้ } L(x^{r_2}) = 0$$

ดังนั้น ถ้า $r_1 \neq r_2$ จะได้คำตอบ $\phi_1(x) = x^{r_1}$ และ $\phi_2(x) = x^{r_2}$

เป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น ดังนั้น คำตอบทั่วไปคือ $y = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}$

กรณี ราก $r_2 = r_1$ เราทราบว่า

$$q(r_1) = 0, \quad q'(r_1) = 0 \quad \dots\dots\dots (***)$$

อนึ่ง $L(x^{r_1}) = 0$

$$\begin{aligned} \text{เรามี} \quad \frac{\partial}{\partial r} L(x^r) &= L\left(\frac{\partial}{\partial r} x^r\right) \\ &= L(x^r \ln x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{แต่} \quad L(x^r \ln x) &= x^r (x^r \ln x)'' + ax(x^r \ln x)' + b(x^r \ln x) \\ &= [r(r-1)\ln x + 2r-1]x^r + a(r \ln x + 1)x^r + b(1 \ln x)x^r \\ &= [q'(r) + q(r) \ln x]x^r \quad \text{จาก (*) และ (**)} \\ &= 0 \quad \text{เมื่อ } r = r_1 \quad \text{จาก (***)} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad L(x^{r_1} \ln x) = 0$$

และ $\phi_2(x) = x^{r_1} \ln x$ เป็นอีกคำตอบหนึ่งของสมการออยเลอร์

คำตอบ $\phi_1(x) = x^{r_1}$, $\phi_2(x) = x^{r_1} \ln x$ เป็นอิสระเชิงเส้น เพราะ

$$c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_1} \ln x = 0 \quad \dots\dots\dots (x > 0)$$

$$\rightarrow c_1 + c_2 \ln x = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{และ} \quad \frac{c_2}{x} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$\therefore$ จาก (3) $c_2 = 0$ และจะได้ตามมาจาก (2) อีกว่า $c_1 = 0$

ดังนั้นได้คำตอบ $y = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_1} \ln x$ เป็นคำตอบ

6.3.3 คำตอบแบบอนุกรมรอบจุดโคเดเดี่ยวปกติ

โฟรเบนิอุส สนใจคำตอบใกล้จุดโคเดเดี่ยว ในตอนท้ายของศตวรรษที่ 19 เริ่มต้นด้วย การศึกษาสมการออยเลอร์ และคำตอบของสมการ

$$1. \quad 2x^2 y'' + xy' - y = 0 \quad \text{คำตอบ } y = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-\frac{1}{2}}$$

$$2. \quad x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 \quad \text{คำตอบ } y = c_1 x^2 + c_2 x$$

$$3. \quad x^2 y'' - xy' + y = 0 \quad \text{คำตอบ } y = c_1 x + c_2 x \ln x$$

รูปสมการคล้ายกันมาก แต่คำตอบต่างกัน คำตอบเหล่านี้ไม่สามารถใช้อนุกรมยกกำลังรอบจุด $x = 0$ เป็นตัวแทนได้ แต่อย่างน้อยหนึ่งคำตอบอยู่ในรูป

$$y = x^r (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots) \quad \text{เรียกคำตอบนี้ว่า คำตอบแบบโฟรเบนิอุส}$$

ถ้าขยายสมการเป็น $x^2 y'' + x a(x) y' + b(x) y = 0$ โดย $a(x)$, $b(x)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ 0 มีรัศมี

ลู่เข้า r_0 เดียวกัน (ให้ $a(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ และ $b(x) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k$) จะเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$x^2 y'' + x(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k) y' + (b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k) y = 0 \quad \text{..... (B)}$$

สมการนี้ไม่เป็นสมการของออยเลอร์ แต่จะใกล้เคียงสมการของออยเลอร์ เมื่อ x ใกล้ 0

สมมติ คำตอบ $y = x^r (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)$

เมื่อแทนค่า คำตอบดังกล่าวในสมการเชิงอนุพันธ์ จะได้สัมประสิทธิ์ของ x^r เป็น

$$c_0 [r(r-1) + a_0 r + b_0] = 0$$

เรียกสมการนี้ว่า สมการครรชนี (indicial equation) ของสมการ (B) รากของสมการครรชนี
ปกติมี 2 ค่า r_1, r_2 (ซึ่ง r_1, r_2 อาจจะเป็นจำนวนเชิงซ้อนได้) อาจขึ้นอยู่กับค่า c_0 ที่เลือกได้
ปกติเลือก $c_0 = 1$ เพื่อให้ง่าย

โดยหลักการเทียบสัมประสิทธิ์ทำนองเดียวกับวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ในหัวข้อ 6.2.2 เราจะสามารถ
หา $c_1, c_2, \dots$ ได้โดยสูตรหมุนเวียน (recursion formula) ที่เกิดขึ้น

ให้ $p(x, r)$ เป็นอนุกรมเกิดจากการแทนค่า c_i ในคำตอบโฟรเบนิอุส

กรณี 1 ผลต่างราก $r_1 - r_2$ ไม่ใช่จำนวนเต็ม ใช้รากจาก r_1, r_2 หาคำตอบได้

$$y_1 = p(x, r_1), \quad y_2 = p(x, r_2)$$

กรณี 2 ราก $r_1 = r_2$ จะได้คำตอบที่เป็นอิสระต่อกันในเชิงเส้นสองคำตอบคือ

$$y_1 = p(x, r) \Big|_{r=r_1}, \quad y_2 = \frac{\partial}{\partial r} p(x, r) \Big|_{r=r_1}$$

กรณี 3 $r_1 - r_2$ เป็นจำนวนเต็มบวก เราจะได้คำตอบแบบอนุกรมรอบจุด 0

$$\text{เป็น } y_1 = p(x, r) \Big|_{r=r_1}, \quad y_2 = \frac{\partial}{\partial r} p(x, r) \Big|_{r=r_2}$$

โดยในการหา y_2 ใช้ $c_0 = r - r_2$

ทั้งสองกรณี คำตอบทั่วไป มีรัศมีการลู่เข้า r_0

หมายเหตุ 1. ข้อความที่ติกรอบข้างต้นนี้พิสูจน์ได้ แต่ยุ่งยากและยาวเกินไปที่จะไว้ในที่นี้

2. กรณี 2 และ 3 เป็นกรณีที่คำตอบติดค่าลอการิทึม ในกรณี 3 คำตอบน่าจะเป็นทำนองเดียวกับกรณี 1 ดูเกี่ยวกับของสมการออยเลอร์ แต่เนื่องจากลักษณะคำตอบเป็นอนุกรมจะเกิดพจน์ซ้อนกันในอนุกรมที่กระจาย จึงเกิดความยุ่งยากขึ้น

6.3.4 ตัวอย่างการแก้สมการแบบอนุกรม รอบจุดโคคเคียวปรกติ

ตัวอย่าง 6.3.4 (ผลต่างของรากไม่เป็นจำนวนเต็ม) จงหาคำตอบของสมการ

$$3x^2 y'' + x(x-5)y' + 5y = 0$$

รอบจุดโคคเคียวปรกติ $x = 0$

วิธีทำ สมมติคำตอบเป็น

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{i+r}, \quad c_0 = 1^*$$

แทนค่าในโจทย์ได้

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} 3(i+r)(i+r-1)c_i x^{i+r} \\ & + \sum_{i=0}^{\infty} (i+r)c_i x^{i+r+1} - \sum_{i=0}^{\infty} 5(i+r)c_i x^{i+r} \\ & + \sum_{i=0}^{\infty} 5c_i x^{i+r} = 0 \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

ดังนั้น สัมประสิทธิ์ของ x^{k+r} , $k \geq 0$ คือ

$$3(k+r)(k+r-1)c_k + (k+r-1)c_{k-1} - 5(k+r)c_k + 5c_k = 0$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} c_k &= -\frac{(k+r-1)c_{k-1}}{3(k+r)(k+r-1)-5(k+r)+5} \\ &= -\frac{(k+r-1)c_{k-1}}{(k+r-1)[3(k+r)-5]} \end{aligned}$$

และได้สูตรหามวลเวียนคือ

$$c_k = -\frac{c_{k-1}}{3(k+r)-5}$$

อนึ่ง สมการดรรชนี คือ $3r(r-1) - 5r + 5 = 0$ (ส.ป.ส. ของ x^r ในข้อ (1) ซึ่ง $c_0 = 1$)

$$3r^2 - 8r + 5 = 0$$

$$(3r-5)(r-1) = 0$$

* ตามปรกติเลือก c_0 เป็นจำนวนใดก็ได้ที่ไม่เป็น 0 ที่มีสิทธิ์เลือกได้ เพราะถ้า y เป็นคำตอบของสมการเอกพันธ์ $\frac{m}{c_0}y$ จะเป็นคำตอบด้วย

ได้ราก $r_1 = \frac{5}{3}$ และ $r_2 = 1$

รากทั้งสองนี้ ผลต่างไม่เป็นจำนวนเต็ม

กรณีราก $r_1 = \frac{5}{3}$ จะได้สูตรหามุมเวียน $c_k = -\frac{c_{k-1}}{3k}$

ดังนั้น $c_1 = -\frac{1}{3}c_0 = -\left(\frac{1}{3}\right)$,

$$c_2 = -\frac{1}{6}c_1 = -\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^2},$$

$$c_3 = -\frac{1}{9}c_2 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^2} = -\frac{1}{3^2 \cdot 3!},$$

$$c_n = \frac{(-1)^n}{3^n \cdot n!},$$

ดังนั้นคำตอบ $y_1 = p(x, r) \Big|_{r = \frac{5}{3}}$

$$= x^{\frac{5}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \cdot n!} x^n$$

กรณีราก $r = 1$ เราได้สูตรหามุมเวียนเป็น $c_k = -\frac{c_{k-1}}{3k-2}$, $k \geq 1$

$$c_1 = -c_0 = -1,$$

$$c_2 = -\frac{1}{4}c_1 = \frac{1}{4},$$

$$c_3 = -\frac{1}{7}c_2 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7},$$

$$c_n = \frac{(-1)^n}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \dots (3n-2)},$$

และได้คำตอบ $y_2 = p(x, r) \Big|_{r = 1}$

$$= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \dots (3n-2)} x^n$$

ดังนั้นคำตอบทั่วไปคือ

$$y = Ax^{\frac{5}{3}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{3^n n!} \right] + Bx \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \dots (3n-2)} x^n \right]$$

ตัวอย่าง 6.3.5 (รากเท่ากัน) จงหาคำตอบ

$$x^2 D^2 y + (x^2 - 5x)Dy + (9 - 3x)y = 0$$

รอบจุดโคจเดี่ยวปกติ $x = 0$

วิธีทำ สมมติคำตอบเป็น $y = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{i+r}$ โดย $c_0 = 1$ แทนค่าในสมการโทยได้

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} (i+r)(i+r-1)c_i x^{i+r} \\ & + \sum_{i=0}^{\infty} (i+r)c_i x^{i+r+1} - \sum_{i=0}^{\infty} 5(i+r)c_i x^{i+r} \\ & + \sum_{i=0}^{\infty} 9c_i x^{i+r} - \sum_{i=0}^{\infty} 3c_i x^{i+r+1} = 0 \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

สัมประสิทธิ์ของ x^{k+r} คือ

$$(k+r)(k+r-1)c_k + (k+r-1)c_{k-1} - 5(k+r)c_k + 9c_k - 3c_{k-1} = 0$$

สูตรหามุมเวียน

$$c_k = -\frac{(k+r-4)c_{k-1}}{(k+r)^2 - 6(k+r) + 9} = -\frac{(k+r-4)c_{k-1}}{(k+r-3)^2}$$

$$c_1 = -\frac{(r-3)}{(r-2)^2} \quad (\because c_0 = 1)$$

$$c_2 = -\frac{(r-2)}{(r-1)^2} c_1 = \frac{r-3}{(r-1)^2 (r-2)}$$

$$c_3 = -\frac{(r-1)}{r^2} c_2 = -\frac{r-3}{r^2 (r-1)(r-2)}$$

$$c_4 = -\frac{rc_3}{(r+1)^2} = \frac{r-3}{(r+1)^2 r (r-1)(r-2)}$$

$$c_n = (-1)^n \frac{r-3}{(r+n-3)^2 (r+n-4) \dots r(r-1)(r-2)}$$

$$\text{ดังนั้น } p(x, r) = x^r \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (r-3)x^n}{(r+n-3)^2 (r+n-4) \dots r(r-1)(r-2)} \right]$$

อนึ่ง สมการครรชนนี้คือ

$$r(r-1) - 5r + 9 = 0 \quad (\text{ส.ป.ส.ของ } x^r \text{ ใน (1) ซึ่ง } c_0 = 1)$$

$$r^2 - 6r + 9 = 0$$

$$\text{มีรากซ้ำ } r = 3, 3$$

$$\text{แทนค่า } r=3 \text{ ดังนั้น } c_1 = 0 \text{ และได้ } c_2 = c_3 = \dots = 0$$

$$\begin{aligned}\text{จึงได้คำตอบเป็น } y_1 &= p(x, r) \Big|_{r=3} \\ &= x^3 (1 + 0 + 0 + \dots) \\ &= x^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{หาคำตอบที่ 2, เนื่องจาก } p(x, r) &= x^r \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (r-3)x^n}{(r+n-3)^2 (r+n-4) \dots r(r-1)(r-2)} \right] \\ &= x^r \sigma(x, r)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = x^r \ln x \sigma(x, r) + x^r \frac{\partial}{\partial r} \sigma(x, r)$$

$$\begin{aligned}\text{คำตอบที่ 2 } y_2 &= \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=3} \\ &= x^3 \ln x + x^3 \frac{\partial}{\partial r} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (r-3)x^n}{(r+n-3)^2 (r+n-4) \dots r(r-1)(r-2)} \right]_{r=3} \\ &= x^3 \ln x + x^3 \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(r+n-3)^2 (r+n-4) \dots r(r-1)(r-2)} \right]_{r=3}^* \\ &= x^3 \ln x + x^3 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n(n!)}\end{aligned}$$

คำตอบทั่วไป คือ $y = Ay_1 + By_2$

ตัวอย่าง 6.3.6 (ผลต่างรากเป็นจำนวนเต็ม) จงหาคำตอบของสมการเบสเซล

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$$

วิธีทำ สมมติคำตอบเป็น $y = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{i+r}$ แทนค่าในสมการโจทยได้

$$\begin{aligned}& \sum_{i=0}^{\infty} (i+r)(i+r-1) c_i x^{i+r} \\ & + \sum_{i=0}^{\infty} (i+r) c_i x^{i+r} \\ & + \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{i+r+2} - \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{i+r} = 0\end{aligned}$$

สัมประสิทธิ์ของ x^{1+r} คือ

$$[(1+r)r + (1+r) - 1]c_1 = 0 \dots\dots\dots (a)$$

เมื่อ $k \geq 2$ สัมประสิทธิ์ของ x^{k+r} คือ

$$(k+r)(k+r-1)c_k + (k+r)c_k + c_{k-2} - c_k = 0$$

* ใช้สูตรหาอนุพันธ์ของผลหาร ซึ่งจะได้พจน์ที่มี $(r-3)$ คูณอยู่ เมื่อแทน $r=3$ แล้วจึงเป็น 0

ได้สูตรหุนเวียน

$$c_k = -\frac{c_{k-2}}{(k+r-1)(k+r+1)} \quad \text{เมื่อ } k \geq 2 \dots\dots\dots (b)$$

อนึ่งสมการครรรชนี คือ $q(r) = c_0[r(r-1) + r - 1] = 0$ (ส.ป.ส. ของ x^r)

$$(r-1)(r+1) = 0 \quad \text{เมื่อใช้ } c_0 = 1$$

รากคือ $r = 1, -1$ ต่างก็เป็นจำนวนเต็ม

แทนค่า $r = 1$ ใน (a), (b) เราได้ $c_1 = 0$ และ $c_k = \frac{c_{k-2}}{k(k+2)}$

ดังนั้น c ที่ห้อยด้วยเลขคี่เป็น 0 ส่วน c ที่ห้อยด้วยเลขคู่ เมื่อ $c_0 = 1$ ได้แก่

$$c_2 = -\frac{c_0}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{-1}{2^2 1! 2!}$$

$$c_4 = -\frac{c_2}{4 \cdot 6} = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{1}{2^4 2! 3!}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)(n+1)!}$$

$$\dots\dots\dots$$

ดังนั้นคำตอบหนึ่งคือ

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^{2n} (n!)(n+1)!}$$

สำหรับค่า $r = -1$ ถ้าแทนทันทีในสูตรหุนเวียนจาก (b) จะได้ $c_k = -\frac{c_{k-2}}{(k-2)k}$

ส่วนที่มี $k-2$ คูณอยู่ทำให้รูปสัมประสิทธิ์ $c_k, k \geq 2$ มีส่วนเป็น 0 ซึ่งไม่มีนิยาม

เราจึงยังไม่ได้คำตอบ y_2 ในรูปอนุกรม ปัญหานี้พลิกแพลงแก้ไขได้โดยยังไม่แทนค่า r

แต่ใช้ $c_0 = r+1$ ดังนี้ *

$$y = x^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad \text{โดย } c_0 = r+1$$

จาก (a) เราได้ $c_1 = 0$

จาก (b) เราจะได้ c ที่ห้อยเลขคี่เป็น 0 ส่วน c ที่ห้อยเลขคู่ได้แก่

$$c_2 = -\frac{c_0}{(r+1)(r+3)} = -\frac{1}{r+3} \quad (\text{เพราะใช้ } c_0 = r+1)$$

$$c_4 = -\frac{c_2}{(r+3)(r+5)} = \frac{(-1)^2}{(r+3)^2 (r+5)}$$

$$\dots\dots\dots$$

* คำตอบอนุกรมมีสิทธิ์ใช้สัมประสิทธิ์ของ x^r คือ c_0 เป็นจำนวนจริงใดก็ได้ที่ไม่เป็นศูนย์

$$c_{2k} = -\frac{c_{2k-2}}{(2k+r-1)(2k+r+1)} = \frac{(-1)^k}{(r+3)^2 \dots (2k+r-1)^2 (2k+r+1)}$$

ดังนั้น เราได้

$$p(x, r) = x^r \left[(r+1) - \frac{x^2}{r+3} + \dots + \frac{(-x^2)^k}{(r+3)^2 \dots (2k+r-1)^2 (2k+r+1)} + \dots \right]$$

แทนค่า $r = -1$ เราได้ $p(x, -1)$ เป็นคำตอบ แต่

$$\begin{aligned} p(x, -1) &= x^{-1} \left[0 - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-x^2)^k}{2^2 \dots (2k-2)^2 (2k)} + \dots \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k-1}}{2^{2k-2} ((k-1)!)^2 (2k)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^{2n} (n!)^2 (n+1)} \end{aligned}$$

$\therefore (x, -1) = -\frac{1}{2}y_1$ ซึ่งให้เห็นว่าเกิดรากซ้ำ เมื่อสำรวจปรากฏว่าสมการครรชนีคือ

$$(r+1)[r(r-1)+r-1] = 0$$

ดังนั้นคำตอบที่ 2 คือ

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{\partial}{\partial r} p(x, r) \Big|_{r=-1} \\ &= x^{-1} \ln x \left[0 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4} - \dots \right] + x^{-1} \left[1 + \frac{x^2}{(r+3)^2} + \dots + (-x^2)^k \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{d(r)} + \dots \right]_{r=-1} \end{aligned}$$

โดยที่ $d(r) = (r+2k-1) \dots (r+3)(r+2k+1) \dots (r+3)$

$$\begin{aligned} \text{ซึ่ง } \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{d(r)} &= -\frac{1}{[d(r)]^2} \frac{\partial}{\partial r} d(r) \\ &= -\left[\left(\frac{1}{r+2k-1} + \dots + \frac{1}{r+3} + \frac{1}{r+2k+1} + \dots + \frac{1}{r+3} \right) \frac{1}{d(r)} \right]_{r=-1}^* \\ &= -2 \left(\frac{1}{2^{2k}} \right) \left[\frac{1}{2k-2} + \frac{1}{2k-4} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k-2} + \dots + \frac{1}{2} \right] \frac{1}{k!(k-1)!} \\ &= -\left(\frac{1}{2^{2k}} \right) \left[\frac{1}{k} + \frac{2}{k-1} + \frac{2}{k-2} + \dots + \frac{2}{3} + \frac{2}{2} + 2 \right] \frac{1}{k!(k-1)!} \\ \therefore y_2 &= -\frac{y_1}{2} \ln x + \frac{1}{x} \left[1 + \frac{x^2}{4} - \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k} + \frac{2}{k-1} + \dots + \frac{2}{2} + 2 \right) \frac{[-x^2]^k}{2^{2k} (k!)(k-1)!} \right] \end{aligned}$$

ดังนั้น คำตอบของสมการเบสเซล $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$ คือ $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

* ใช้สูตร $(u_1 u_2 \dots u_n)' = \sum_{i=1}^n (u_1 u_2 \dots u_{i-1} u_{i+1} \dots u_n) u_i'$

แบบฝึกหัด 6.3

1. จงหาจุดโคดเคี้ยว ในระนาบจำกัดของแต่ละสมการต่อไปนี้

ก. $x^3 (x-1)y'' + (x-1)y' + 4xy = 0$

ข. $x^2 (x^2 - 4)y'' + 2x^3 y' + 3y = 0$

ค. $y'' + xy = 0$

ง. $x^2 y'' + y = 0$

จ. $x^4 y'' + y = 0$

ฉ. $(x+1)(x-4)^3 y'' + (x-4)^2 y' + y = 0$

ช. $x^2 (x-2)y'' + 3(x-2)y' + y = 0$

ซ. $x^2 (x-4)^2 y'' + 3xy' - (x-4)y = 0$

2. ในแต่ละสมการต่อไปนี้ จงหาคำตอบสองคำตอบรอบจุดกำเนิดที่เป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น

ก. $2x(x-1)y'' + (x-1)y' - y = 0$

ข. $4xy'' + 3y' - 3y = 0$

ค. $2x^2 (x+1)y'' + x(7x-1)y' + y = 0$

ง. $2xy'' + 5(1+2x)y' + 5y = 0$

จ. $8x^2 y'' + 10xy' - (1+x)y = 0$

ฉ. $3xy'' + (2-x)y' - 2y = 0$

ช. $2x(x+3)y'' - 3(x+1)y' + 2y = 0$

ซ. $2x^2 y - x(2x+1)y + (1-5x)y = 0$

ฉ. $9x^2 y + 3x(x+3)y - (1+4x)y = 0$

ญ. $2xy'' + (1-2x^2)y' - 4xy = 0$

ฎ. $x^2 y'' - x(1+x)y' + y = 0$

ฏ. $4x^2 y'' + (1-2x)y = 0$

ฐ. $x^2 y'' + x(x-3)y' + 4y = 0$

ท. $x(1+x)y'' + (1+5x)y' + 3y = 0$

ฑ. $x^2 y'' + x(x-1)y' + (1-x)y = 0$

ฒ. $x(x-2)y'' + 2(x-1)y' - 2y = 0$

3. จงหาคำตอบทั่วไปรอบจุด $x = 0$ และจงระบุบริเวณ ซึ่งคำตอบนี้มีนิยาม

ก. $x^2 y'' + 2x(x-2)y' + 2(2-3x)y = 0$

ข. $x^2 (1+2x)y'' + 2x(1+6x)y' - 2y = 0$

4. จงหาคำตอบสองคำตอบรอบ $x = 0$

ก. $xy'' + y = 0$

ข. $x^2 y'' - 3xy' + (3+4x)y = 0$

ค. $2xy'' + 6y' + y = 0$

5. สมการไฮเพอร์ยอเมตริก (hypergeometric)

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0$$

เมื่อ a, b, c เป็นพารามิเตอร์คงที่

ก. จงแสดงว่าจุด $x = 0$ และ $x = 1$ เป็นจุดโคดเคี้ยวปกติ

ข. จงแสดงว่าสมการครรรชนีของสมการนี้คือ $m(m-1+c) = 0$

ค. ถ้า c ไม่เป็นจำนวนเต็ม จงแสดงว่าฟังก์ชัน

$$y_1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n b_n x^n}{(c)_n n!} \quad \text{และ}$$

$$y_2 = x^{1-c} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1-c)_n (b+1-c)_n x^{n+1}}{(2-c)_n n!}$$

$$\text{โดยที่ } (d)_n = d(d+1)(d+2)\dots(d+n-1)$$

เป็นคำตอบเฉพาะของสมการไฮเพอร์ยีโอเมตริก

ง. ถ้า c เป็นจำนวนเต็ม จงให้เหตุผล คำตอบหนึ่งในสองของข้อ ค. เป็นคำตอบเฉพาะ แต่อีกคำตอบหนึ่งจะมีส่วนเป็น 0

คำตอบแบบฝึกหัด 6.3

1.	จุดโคคเคียว	จุดโคคเคียวปรกติ
ก.	0,1	1
ข.	0, 2, -2	0, 2, -2
ค.	-	-
ง.	0	0
จ.	0	-
ฉ.	4, i, -i	i, -i
ช.	0, 2	2
ซ.	0, 4	0

$$2. \text{ ก. } y_1 = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4n^2 - 1} ; y_2 = x^{-1/2} - x^{1/2}$$

$$\text{ข. } y_1 = x^{\frac{1}{4}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n x^{n+\frac{1}{4}}}{n! 5 \cdot 9 \cdot 13 \dots (4n+1)} ;$$

$$y_2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{n! 3 \cdot 7 \cdot 11 \dots (4n-1)}$$

$$\text{ค. } y_1 = x + \frac{1}{15} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+3)(2n+5) x^{n+1} ;$$

$$y_2 = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+2) x^{n+\frac{1}{2}}$$

$$ง. y_1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(-5)^n x^n}{n!(2n+1)(2n+3)} ; y_2 = x^{-3/2} - 10x^{-1/2}$$

$$จ. y_1 = x^{\frac{1}{4}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+\frac{1}{4}}}{2^n n! \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15 \dots (4n+3)} ;$$

$$y_2 = x^{-\frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-\frac{1}{2}}}{2^n n! \cdot 1 \cdot 5 \cdot 9 \dots (4n-3)}$$

$$ฉ. y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n+4)x^{n+\frac{1}{3}}}{4 \cdot 3^n n!} ; y_2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)}$$

$$ช. y_1 = x^{3/2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{n+\frac{3}{2}}}{3^{n-1}(2n-1)(2n+1)(2n+3)} ; y_2 = 1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}x^2$$

$$ฌ. y_1 = x + \frac{1}{15} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+3)(2n+5)x^{n+1}}{n!} ;$$

$$y_2 = x^{\frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}(n+1)(n+2)x^{n+\frac{1}{2}}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}$$

$$ฉล. y_1 = x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{5}x^{\frac{4}{3}} ; y_2 = x^{-\frac{1}{3}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10(-1)^n x^{n-\frac{1}{3}}}{3^n n!(3n-5)(3n-2)}$$

$$ญ. y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+\frac{1}{2}}}{2^k k!} = x^{\frac{1}{2}} e^{\frac{x^2}{2}} ; y_2 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^{2k}}{3 \cdot 7 \cdot 11 \dots (4k-1)}$$

$$ญ. y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} + x e^x ; y_2 = y_1 \ln x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n x^{n+1}}{n!}$$

$$\text{โดย } H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$ญ. y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{2^n (n!)^2} ; y_2 = y_1 \ln x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n x^{n+\frac{1}{2}}}{2^{n-1} (n!)^2}$$

$$ฐ. y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)x^{n+2}}{n!} ; y_2 = y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} [n + (n+1)H_n] x^{n+2}}{n!}$$

$$ฑ. y_1 = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+2)x^n ;$$

$$y_2 = y_1 \ln x - \frac{3}{2} y_1 \ln x - \frac{3}{2} (y_1 - 1) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+3)x^n$$

$$\text{ฉ. } y_1 = x ; y_2 = y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n \cdot n!}$$

$$\text{ณ. } y_1 = 1 - x ; y_2 = y_1 \ln x + \frac{5}{2}x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{2^n(n-1)}$$

$$3. \text{ ก. } y = a_0(x - 2x^2 + 2x^3) + a_3 \left[x^4 + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{6(-2)^{n-3} x^{n+1}}{n!} \right], x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\text{ข. } y = a_0(x^{-2} - 6x^{-1} + 24) + a_3 \left[x + \frac{1}{20} \sum_{n=4}^{\infty} (-2)^{n-3} (n+2)(n+1)x^{n-2} \right], x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - \{0\}$$

$$4. \text{ ก. } y_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!(n-1)!} ; y_2 = y_1 \ln x + 1 + x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (H_n + H_{n-1})x^n}{n!(n-1)!}$$

$$\text{ข. } y_1 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 4^n x^{n+1}}{n!(n-2)!} ; y_2 = y_1 x + y_1 + x + 4x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-4)^n (H_n + H_{n-2})x^{n+1}}{2^n n!(n-2)!}$$

$$\text{ค. } y_1 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{n-2}}{2^n n!(n-2)!} ; y_2 = y_1 \ln x + y_1 + x^{-2} + \frac{1}{2}x^{-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (H_n + H_{n-2})x^{n-2}}{2^n n!(n-2)!}$$

ภาคผนวก 1 ทฤษฎีบทการมีคำตอบหนึ่งเดียว

แนวการพิสูจน์ เราหาลำดับของฟังก์ชัน ซึ่งมีลิมิต และฟังก์ชัน ซึ่งเป็นลิมิตนั้นเป็นคำตอบลักษณะตามต้องการของสมการ ลำดับของฟังก์ชันดังกล่าวกำหนดดังนี้

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_0(x) = y_0 \\ y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt, \\ y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt, \\ \dots\dots\dots \\ y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

ตัวอย่าง 1 จงแสดงว่าลำดับของฟังก์ชันนิยามดัง (A) ลู่เข้า (converges) สู่อำตอบของปัญหาค่า

เริ่มต้น $\frac{dy}{dx} = y, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1$

วิธีทำ เราพบว่า $y_0(x) = 1$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x dt = 1 + x$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (1+t) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x (1+t+\frac{t^2}{2}) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$$

โดยแนวโน้ม เราสังเกตว่า $y_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$

$$\therefore \phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

เราสามารถแสดงได้โดยง่ายว่า $y = e^x$ เป็นคำตอบของปัญหาเริ่มต้นดังกล่าว

ตัวอย่าง 2 จงแสดงว่าลำดับของฟังก์ชันนิยามดัง (A) ลู่เข้าคำตอบของ

$$y' = x + y, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1$$

วิธีทำ เราได้ $y_0(x) = 1$

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 + \int_0^x f(t, y_0(t)) dt \\ &= 1 + \int_0^x (t+1) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_2(x) &= 1 + \int_0^x f(t, y_1(t))dt \\&= 1 + \int_0^x (t + 1 + t + \frac{t^2}{2})dt \\&= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3!}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_3(x) &= 1 + \int_0^x f(t, y_2(t))dt \\&= 1 + \int_0^x (t + 1 + t + t^2 + \frac{t^3}{3!})dt \\&= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4!}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_4(x) &= 1 + \int_0^x (t + 1 + t + t^2 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4!})dt \\&= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^5}{5!} = 2(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}) - 1 - x + \frac{x^5}{5!}\end{aligned}$$

โดยแนวนี้เราได้ $y_n(x) = 2 \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} - 1 - x + \frac{x^n}{n!}$

และ $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1 - x$ ($\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ ทุกจำนวนจริง x)

$$= 2e^x - 1 - x$$

เราสามารถแสดงได้โดยง่ายว่า $y = 2e^x - 1 - x$ เป็นคำตอบของสมการ

$$y' = x + y, x_0 = 0, y_0 = 1$$

เงื่อนไขลิปชิตซ์ (The Lipschitz condition)

ให้ f เป็นฟังก์ชันมีนิยามสำหรับ (x, y) ในเซต S เซตหนึ่ง เรากล่าวว่า f สอดคล้องกับเงื่อนไขลิปชิตซ์ บน S ก็ต่อเมื่อ มีตัวคงค่า $K > 0$ ซึ่ง

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K |y_1 - y_2|$$

ทุกจุด $(x, y_1), (x, y_2)$ ใน S เรียกตัวคงค่า K ว่า ตัวคงค่าลิปชิตซ์ (Lipschitz constant)

ใช้ฟังก์ชันที่ต่อเนื่องและสอดคล้องกับเงื่อนไขลิปชิตซ์บนอาณาบริเวณรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าสร้างลำดับ (A) จะได้ลำดับดังกล่าวเข้าสู่คำตอบของปัญหาค่าเริ่มต้น $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ ทฤษฎีบทการมีคำตอบหนึ่งเดียวสำหรับสมการ $y' = F(x, y)$ ทฤษฎีบท ให้ $F(x, y)$ และ $F_y(x, y)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องในโดเมน D อันหนึ่งของระนาบ xy และ (x_0, y_0) เป็นจุดของ D จะมีคำตอบ $y = f(x)$ ($|x - x_0| < h$) ของสมการ $y' = F(x, y)$ ซึ่ง $f(x_0) = y_0$ และมีคำตอบเดียว

พิสูจน์ เราเลือก h_1, k_1 ให้น้อยจนกระทั่งบริเวณผืนผ้า

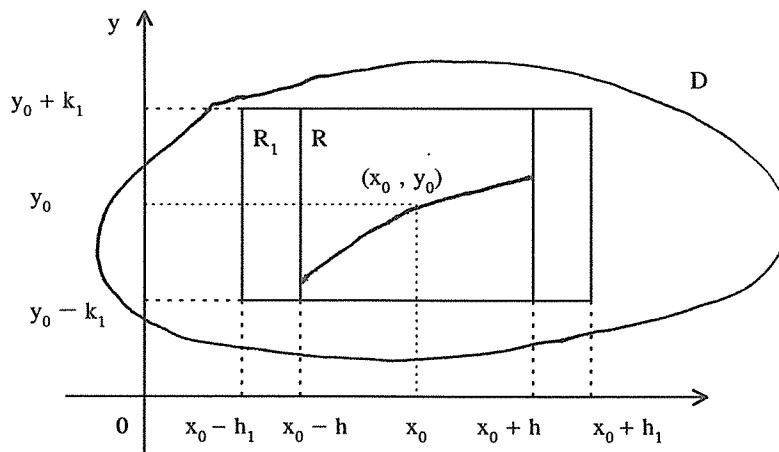
$$R_1 : |x - x_0| < h_1, |y - y_0| \leq k_1$$

อยู่ใน D (รูป 1), ดังนั้น ถ้า $(x, y_1), (x, y_2) \in R_1$ โดยทฤษฎีบทค่ากลางเราได้

$$F(x, y_2) - F(x, y_1) = (y_2 - y_1) F_y(x, y^*)$$

สำหรับ y^* บางค่าระหว่าง y_1 กับ y_2 เนื่องจาก F_y ต่อเนื่องใน R_1 จะได้

$$|F_y(x, y)| \leq K \text{ สำหรับทุก } (x, y) \in R_1 \text{ และบางตัวคงค่าบวก } K$$



รูป 1 การพิสูจน์ทฤษฎีบทการมีคำตอบหนึ่งเดียว

ดังนั้น $|F(x, y_2) - F(x, y_1)| \leq K |y_2 - y_1|$ ซึ่ง F สอดคล้องกับเงื่อนไขลิปชิตซ์ บน R_1

อนึ่ง $F(x, y)$ ต่อเนื่องใน R_1 จะมีตัวคงค่าบวก M ซึ่ง

$$|F(x, y)| \leq M \quad (x, y) \in R_1$$

ให้ $h = \min\left\{h_1, \frac{k_1}{M}\right\}$ และกำหนดบริเวณ $R : |x - x_0| \leq h, |y - y_0| \leq k_1$ ใน R_1

ต่อไปเรานิยามลำดับของฟังก์ชัน $f_n(x)$ บนช่วง $|x - x_0| \leq h$ ดังนี้

$$f_0(x) = y_0$$

$$f_1(x) = \int_{x_0}^x F(t, y_0) dt + y_0$$

$$f_2(x) = \int_{x_0}^x F(t, f_1(t)) dt + y_0$$

$$f_n(x) = \int_{x_0}^x F(t, f_{n-1}(t)) dt + y_0, n = 1, 2, \dots$$

ประการแรก เราแสดงว่าทุก $f_n(x)$ มีกราฟใน R ซึ่งเท่ากับเราให้นิยามแจ่มชัด (well-defined)

เราเห็นว่า $f_0(x)$ มีกราฟใน R ถ้า $f_{n-1}(x)$ มีกราฟใน R จะได้ $F(t, f_{n-1}(t))$ มี

นิยามบน $|t - x_0| \leq h$ และ

$$\begin{aligned} |F_n(x) - f_0(x)| &= \left| \int_{x_0}^x F(t, f_{n-1}(t)) dt \right| \\ &\leq M |x - x_0| \\ &\leq M h \leq k_1 \end{aligned}$$

$\therefore f_n(x)$ มีกราฟใน R

ต่อไป เราจะพิจารณาการลู่เข้าของลำดับฟังก์ชัน $f_n(x)$ เรามี

$$\begin{aligned} |f_1(x) - f_0(x)| &= \left| \int_{x_0}^x F(t, y_0) dt \right| \leq M |x - x_0| \\ |f_2(x) - f_1(x)| &= \left| \int_{x_0}^x [F(t, f_1(t)) - F(t, f_0(t))] dt \right| \\ &\leq K \int_{x_0}^x |f_1(t) - f_0(t)| |dt| \\ &\leq K M \int_{x_0}^x |t - x_0| |dt| \\ &\leq K M \frac{|x - x_0|^2}{2} \end{aligned}$$

ทำนองเดียวกันเราได้ $|f_3(x) - f_2(x)| \leq M K^2 \frac{|x - x_0|^3}{3!}$

และโดยการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ $|f_n(x) - f_{n-1}(x)| \leq M K \frac{|x - x_0|^n}{n!}$

อนึ่งตามที่ $|x - x_0| \leq h$ ได้ $|f_n(x) - f_{n-1}(x)| \leq M K \frac{h^n}{n!}$

ดังนั้น อนุกรม $f_0(x) + [f_1(x) - f_0(x)] + \dots + [f_n(x) - f_{n-1}(x)] + \dots$ มีพจน์ซึ่งน้อยกว่า

หรือเท่ากับ $f_0(x) + M h + \dots + M K \frac{h^n}{n!} + \dots \rightarrow \frac{M}{K} e^{Kh} - M + y_0$

ตามลำดับพจน์ต่อพจน์ ดังนั้น อนุกรมของฟังก์ชันดังกล่าวจะลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสู่ฟังก์ชัน $f(x)$

บางฟังก์ชันซึ่งมีนิยามบน $|x - x_0| \leq h$

แต่เราได้ผลบวกย่อยที่ n , $f_0(x) + \dots + [f_n(x) - f_{n-1}(x)] = f_n(x)$ ดังนั้น

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \dots\dots\dots (A)$$

ต่อไป เราแสดงว่า $f(x)$ ต่อเนื่องใน $|x - x_0| \leq h$ ให้ a อยู่ในช่วงนี้ จาก (A) กำหนด $\varepsilon > 0$

จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $|f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ อนึ่งเนื่องจาก f_N ต่อเนื่องจะมี $\delta > 0$

ซึ่งถ้า $|x - a| < \delta$ เราได้ $|f_N(x) - f_N(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$ ดังนั้น ถ้า $|x - a| < \delta$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } |f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

ต่อไป เราแสดงว่า $f(x)$ สอดคล้องกับสมการ $y' = F(x, y)$

เราทราบว่า ลำดับ $g_n(x) = F(x, f_n(x))$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอสู่ $F(x, f(x))$

เมื่อ $|x - x_0| \leq h$ ทั้งนี้เพราะ $f_n(x)$ ลู่เข้าสม่ำเสมอสู่ $f(x)$ โดยนี้

$$|F(x, f(x)) - F(x, f_n(x))| \leq K |f(x) - f_n(x)|$$

$$\begin{aligned} \text{และ } f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n+1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_{x_0}^x F(t, f_n(t)) dt + y_0 \right\} \\ &= \int_{x_0}^x F(t, f(t)) dt + y_0 \end{aligned}$$

$$\text{และ } f'(x) = \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x F(t, f(t)) dt = F(x, f(x))$$

$$\text{อนึ่ง } f(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} F(t, f(t)) dt + y_0 = y_0$$

$y = f(x)$ จึงเป็นคำตอบของปัญหาค่าเริ่มต้น $y' = F(x, y)$, $x = x_0$ ได้ $y = y_0$

อันดับสุดท้าย จะแสดงว่ามี คำตอบเดียว ให้ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นคำตอบของ $y' = F(x, y)$ ในช่วง

$$|x - x_0| < h \text{ ซึ่ง } f(x_0) = g(x_0) = y_0$$

$$\text{เราได้ } g(x) = \int_{x_0}^x F(t, g(t)) dt + y_0$$

$$\begin{aligned} \therefore |f(x) - g(x)| &\leq \int_{x_0}^x |F(t, f(t)) - F(t, g(t))| |dt| \\ &\leq K \int_{x_0}^x |f(t) - g(t)| |dt| \dots\dots\dots (B) \end{aligned}$$

ให้ $C = \max \{ |f(t) - g(t)| \}$ ในช่วง $|x - x_0| < h_1$

$$\text{ได้ } |f(x) - g(x)| \leq K C \int_{x_0}^x |dt| = K C |x - a| \text{ แทนค่านี้ซ้ำ ๆ ใน (B)}$$

$$\text{จะได้ } |f(x) - g(x)| \leq K \int_{x_0}^x K C |t - a| dt = \frac{CK^2 |x - a|^2}{2!}$$

$$|f(x) - g(x)| \leq K \int_{x_0}^x C K \frac{|t - a|^2}{2} |dt| = \frac{CK^3 |x - a|^3}{3!}$$

$$\text{กรณีทั่วไป } |f(x) - g(x)| \leq \frac{CK^n |x - a|^n}{n!} \text{ โดยการอุปนัยทางคณิตศาสตร์}$$

$$\text{ซึ่งพจน์ขวา } \rightarrow 0 \text{ เมื่อ } n \rightarrow \infty \therefore |f(x) - g(x)| = 0 \text{ และ } f(x) = g(x) \square$$

จากทฤษฎีบทการมีคำตอบหนึ่งเดียวของ $y' = F(x, y)$ สามารถขยายไปถึงระบบสมการอันดับหนึ่ง

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_n) \quad i = 1, \dots, n$$

โดย F_i มีนิยามโดเมน D ของปริภูมิ $n+1$ มิติของตัวแปร $x, y_1, \dots, y_n$
 D จะมีคุณสมบัติดังนี้

(ก) ถ้า $(\bar{x}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) \in D$ จะมีจำนวนจริงบวก h ซึ่งทุกจุด $(x, y_1, \dots, y_n)$

ที่ $|x - \bar{x}| < h, |y_1 - \bar{y}_1| < h, \dots, |y_n - \bar{y}_n| < h$ อยู่ใน D

(ข) ทุกสองจุดของ D สามารถต่อเชื่อมด้วยเส้นทางต่อเนื่อง

$$x = \phi_0(t), y_1 = \phi_1(t), \dots, y_n = \phi_n(t) \quad \text{ซึ่งอยู่ใน } D$$

ทฤษฎีบทการมีคำตอบหนึ่งเดียวสำหรับระบบของสมการอันดับหนึ่ง

ทฤษฎีบท ให้ฟังก์ชัน $F_i(x, y_1, \dots, y_n)$ มีนิยามและต่อเนื่องในโดเมน D บางอัน และให้อนุพันธ์
 ย่อย $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$ ($j = 1, \dots, n$) ต่อเนื่องใน D สำหรับทุก $i = 1, \dots, n$ จะได้ว่า

สำหรับแต่ละจุด $(\bar{x}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$ ใน D จะมีคำตอบ

$$y_1 = \phi_1(x), \dots, y_n = \phi_n(x) \quad (|x - \bar{x}| < h) \quad \text{ของระบบ}$$

$$\text{โดย } \frac{dy_i}{dx} = F_i(x, y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, \dots, n) \quad \text{ซึ่ง}$$

$$\phi_i(\bar{x}_i) = \bar{y}_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

แนวทางการพิสูจน์คล้ายกับของสมการ $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ โดย

ทฤษฎีบทค่ากลาง ใช้ $F_1(x, y_1', \dots, y_n') - F_1(x, y_1'', \dots, y_n'')$

$$= (y_1' - y_1'') \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x, y_1^*, \dots, y_n^*) + \dots + (y_n' - y_n'') \frac{\partial F_1}{\partial y_n}(x, y_1^*, \dots, y_n^*)$$

เงื่อนไขลิปชิตซ์ ใช้ $|F_1(x, y_1', \dots, y_n') - F_1(x, y_1'', \dots, y_n'')| \leq K(|y_1' - y_1''| + \dots + |y_n' - y_n''|)$

การสร้างลำดับของฟังก์ชัน ใช้ $\phi_i^{(0)}(x) = \bar{y}_i \quad (i = 1, \dots, n)$

$$\phi_i^{(1)}(x) = \int_{\bar{x}}^x F_i(t, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) dt + \bar{y}_i$$

$$\phi_i^{(N)}(x) = \int_{\bar{x}}^x F_i(t, \phi_1^{(N-1)}(t), \dots, \phi_n^{(N-1)}(t)) dt + \bar{y}_i,$$

$N = 1, 2, \dots$

รายละเอียดของการพิสูจน์ ดู Kaplan ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS หน้า 486-490

ทฤษฎีบทการมีคำตอบหนึ่งเดียวสำหรับสมการอันดับ n

ทฤษฎีบท ให้ F มีนิยามและต่อเนื่องในโดเมน D อันหนึ่งของปริภูมิ $n + 1$ มิติของตัวแปร

$x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$ และอนุพันธ์ย่อย $\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}}$ ต่อเนื่องใน D ให้

$(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$ เป็นจุดใน D จะมีคำตอบ $y = f(x)$ ของสมการ

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}(x_0)) = y_0^{(n-1)} \quad \text{เพียงคำตอบเดียว}$$

พิสูจน์ ใช้ทฤษฎีบทการมีคำตอบหนึ่งเดียวสำหรับระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ดังนี้

ให้ $y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)}$ จะได้ประโยชน์ที่ว่า

$$y = f(x) \quad \text{เป็นคำตอบของสมการ} \quad y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

สมมูลกับประโยชน์

$y_i = \phi_i(x), (i = 1, \dots, n)$ เป็นคำตอบของระบบ

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2, \dots, \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n, \frac{dy_n}{dx} = F(x, y_1, \dots, y_n) \quad \dots\dots\dots(1)$$

และ $\phi_1(x)$ คือ $f(x)$

โดยทฤษฎีบทการมีคำตอบหนึ่งเดียวสำหรับระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง จะ

มีคำตอบ $y_i = \phi_i(x)$ ของ (1) สำหรับ $|x - x_0| < h$ และเราใช้ $f(x) = \phi_1(x)$ $\square$

ภาคผนวก 2 ฟังก์ชันบางฟังก์ชันที่มีผลการแปลงลาปลาซ

ทฤษฎีบท ถ้า f ต่อเนื่องเป็นตอน ๆ ในทุกช่วง $[0, t]$ ซึ่ง $t > 0$ และเป็นฟังก์ชันในกำกับของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล e^{bx} f จะมีผลการแปลงลาปลาซ สำหรับทุก $s > b$

พิสูจน์ f ต่อเนื่องเป็นตอน ๆ ในทุกช่วง $[0, t]$ จะได้ $\int_0^t e^{-sx} f(x) dx$ หาค่าได้
 f อยู่ในกำกับของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล จะมีจำนวนจริง a ซึ่ง

$$|f(x)| \leq M e^{bx} \text{ สำหรับบาง } M > 0 \text{ และทุก } x \geq a$$

$$\int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx = \int_0^a e^{-sx} f(x) dx + \int_a^\infty e^{-sx} f(x) dx$$

แต่เมื่อ $s > b$ เราได้

$$\int_a^\infty |e^{-sx} f(x)| dx \leq M \int_a^\infty e^{-sx} e^{bx} dx = \frac{M e^{-a(s-b)}}{s-b}$$

เนื่องจากจำนวนสุดท้ายนี้เข้าสู่ 0 เมื่อ $s \rightarrow \infty$ จะได้ $\int_a^\infty e^{-sx} f(x) dx \rightarrow 0$

เมื่อ $s \rightarrow \infty$ ด้วยเช่นกัน ดังนั้น

$$\int_0^\infty e^{-sx} f(s) dx$$

หาค่าได้ และ f จะมีผลการแปลงลาปลาซ $\square$

ภาคผนวก 3 ทฤษฎีบทของเลอว์ค

ทฤษฎีบทนี้ กล่าวถึงฟังก์ชัน f ซึ่ง $f(x)$ มีนิยามบนช่วง $0 \leq x < \infty$ และ f ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บนทุกช่วงจำกัด $0 \leq x \leq A$ อนึ่ง $f(t)$ อยู่ในกำกับของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล นั่นคือมีตัวคงค่า α และ M ซึ่ง $|f(x)| \leq Me^{\alpha x}$, $0 \leq t < \infty$

ทฤษฎีบท (Lerch's Theorem) ให้ f เป็นฟังก์ชันตามเงื่อนไขดังกล่าวข้างต้น ถ้า

$$L[f(x)] = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx$$

เป็น 0 ตลอด $s > s_0$ ซึ่ง s_0 เป็นตัวคงค่าบางตัว จะได้ $f(x)$ เป็น 0 ทั้งหมด ยกเว้น ณ จุดที่ f ไม่ต่อเนื่อง

พิสูจน์ ให้ $F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx = 0$, $s > s_0$ (1)

เปลี่ยนตัวแปร $z = e^{-x}$ จัดรูปอินทิกรัลใน (1) ได้เป็น

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx &= \int_0^1 e^{-x(s-1)} f(x) e^{-x} dx \\ &= - \int_1^0 z^{s-1} f(-\ln z) dz \\ &= \int_0^1 z^{s-1} f(-\ln z) dz \end{aligned}$$

ดังนั้น เราได้ $\int_0^1 z^{s-1} f(-\ln z) dz = 0$, $s > s_0$ (2)

ต่อไปเราเลือก $s_1 > \max \{s_0, 1, \alpha+1\}$ จะได้

$$z^{s_1-1} |f(-\ln z)| \leq M z^{s_1-1} e^{\alpha(-\ln z)} = M z^{s_1-(\alpha+1)}$$

จะได้ฟังก์ชัน $G(z) = z^{s_1-1} f(-\ln z)$, $0 < z \leq 1$ มีลิมิตเป็น 0 เมื่อ $z \rightarrow 0$

เรานิยาม $G(0) = 0$ เพื่อให้ G ต่อเนื่องที่ 0 ดังนั้น G จะมีขอบเขต (bounded) ในช่วง $0 \leq z \leq 1$ และจะมีเฉพาะความไม่ต่อเนื่องแบบกระโดด (jump discontinuities) (ซึ่งอาจมีความไม่ต่อเนื่องเป็นจำนวนนับได้ (countable)) และสอดคล้องกับ

$$\int_0^1 G(z) dz = 0$$

$\therefore G(z) = 0$ เมื่อ $0 \leq z \leq 1$ (ยกเว้น ณ จุดที่ไม่ต่อเนื่อง)

แต่ $G(z) = z^{s_1-1} f(-\ln z)$ จะได้ $f(-\ln z) = 0$, $0 < z \leq 1$ (ยกเว้น ณ จุดที่ไม่ต่อเนื่อง)

และ $f(x) = 0$, $0 \leq x < \infty$ (ยกเว้น ณ จุดที่ไม่ต่อเนื่อง) $\square$

หมายเหตุ โดยทฤษฎีบทของเลอว์ค ถ้า $L[f(x)] = L[g(x)]$

จะได้ $f(x) - g(x) = 0$, $0 \leq x < \infty$ (ยกเว้น ณ จุดที่ไม่ต่อเนื่อง)

ภาคผนวก 4 อภิปราย คำตอบใกล้จุดโคดเดี่ยวปกติในกรณีทั่วไป

สมมติ $x > 0$ และเรามีคำตอบ ϕ ในรูป

$$\phi(x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (c_0 \neq 0)$$

ของสมการ

$$Ly = x^2 y'' + a(x)xy' + b(x)y = 0 \quad (1)$$

ซึ่ง $a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$, $b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^k$ วิเคราะห์ใน $|x| < r_0$

เราจะแทนค่า $\phi(x)$ ใน (1) ซึ่งเริ่มด้วยการหา

$$\phi'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+r) c_k x^{k+r-1} = x^{r-1} \sum_{k=0}^{\infty} (k+r) c_k x^k,$$

$$\phi''(x) = x^{r-2} \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1) c_k x^k,$$

$$\begin{aligned} b(x)\phi(x) &= x^r \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^k \right) \\ &= x^r \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^k \quad (B_k = \sum_{j=0}^k c_j \beta_{k-j}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xa(x)\phi'(x) &= x \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k \right) x^{r-1} \sum_{k=0}^{\infty} (k+r) c_k x^k \\ &= x^r \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k \quad (A_k = \sum_{j=0}^k (j+r) c_j \alpha_{k-j}), \end{aligned}$$

$$\text{และ } x^2 \phi''(x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1) c_k x^k$$

$$\text{แทนค่าใน (1) ได้ } L\phi(x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} [(k+r)(k+r-1) c_k + A_k + B_k] x^k = 0$$

ดังนั้น $(k+r)(k+r-1)c_k + A_k + B_k = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$

เมื่อ $k = 0$ เราได้ $r(r-1)c_0 + r\alpha_0 c_0 + \beta_0 c_0 = 0$

$$\text{และได้ } q(r) = r(r-1) + r\alpha_0 + \beta_0 = 0$$

เรียก $q(r) = 0$ ว่า สมการครรชนี

อนึ่ง เมื่อ $k = 1, 2, \dots$ แยกพจน์ที่ k ใน A_k, B_k รวมกับพจน์ข้างหน้า ได้

$$[(k+r)(k+r-1) + (k+r)\alpha_0 + \beta_0] c_k + \sum_{j=0}^{k-1} [(j+r)\alpha_{k-j} + \beta_{k-j}] c_j = 0$$

ซึ่งอยู่ในรูป $q(r+k)c_k + d_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots$) (2)

โดยเฉพาะ $d_k = \sum_{j=0}^{k-1} [(j+r)\alpha_{k-j} + \beta_{k-j}] c_j$ ($k = 1, 2, \dots$) (3)

เป็นผลรวมเชิงเส้นของ $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$

ให้ r และ c_0 เป็นตัวคงค่าไม่เจาะจง แก่สมการ (2) และ (3) ในรูป c_0 และ r

สมมติมีคำตอบ C_k และ D_k ตามลำดับ เราจะได้สูตรหุนเวียน

$$D_k(r) = \sum_{j=0}^{k-1} [(j+r) \alpha_{k-j} + \beta_{k-j}] c_j(r)$$

$$C_k(r) = -\frac{D_k(r)}{q(r+k)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\text{เริ่มจาก } D_1(r) = (r\alpha_1 + B_1)c_0, \quad C_1(r) = -\frac{D_1(r)}{q(r+1)}$$

จะเห็นว่าค่า C_k เป็นฟังก์ชันเศษส่วนของ r (เศษส่วนของพหุนาม) ซึ่งอาจไม่มีคำตอบใน r ที่ $q(r+k) = 0$ สำหรับบาง $k = 1, 2, \dots$ เนื่องจาก $q(r)$ เป็นพหุนามดีกรี 2 จะมีค่า r ดังกล่าวอย่างมาก 2 ค่า

ต่อไป พิจารณา $\phi(x, r) = c_0 x^r + x^r \sum_{k=1}^{\infty} C_k(r) x^k$ เนื่องจาก C_k, D_k สอดคล้องกับ (2) เราได้

$$L \phi(x, r) = c_0 q(r) x^r$$

$\phi(x, r)$ จะเป็นคำตอบของ (1) เมื่อ $q(r) = 0$ และ $q(r+k) \neq 0$ ($k = 1, 2, \dots$)

สำหรับทุกค่า $c_0 \neq 0$ (พึงระลึกด้วยว่าอนุกรมใน $\phi(x, r)$ ต้องเป็นอนุกรมลู่เข้าในบางช่วง ϕ จึงมีสิทธิ์เป็นฟังก์ชันได้)

สมมติ $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ เป็นรากของ $q(r) = 0, r_1 > r_2$ แล้วได้ $q(r_1+k) \neq 0$ สำหรับทุก $k = 1, 2, \dots$ จะได้ $C_k(r_1)$ หาค่าได้ทุก $k = 1, 2, \dots$ แทนค่า r_1 ใน $\phi(x, r)$ จะได้คำตอบ

$$\phi_1(x) = x^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} C_k(r_1) x^k \quad (\text{ซึ่งเราอาจเลือก } C_0(r_1) = c_0(r_1) = c_0 = 1 \text{ เพื่อความสะดวก})$$

ขณะที่ $q(r_1+k) \neq 0$ สำหรับทุก $k = 1, 2, \dots$ $q(r_2+k)$ อาจเป็น 0 สำหรับบาง k หรือไม่เป็น 0 ทั้งหมด ในกรณีที่ $q(r_2+k) \neq 0$ สำหรับทุก $k = 1, 2, \dots$ แทนค่า r_2 ใน $\phi(x, r)$ จะได้คำตอบ

$$\phi_2(x) = x^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} C_k(r_2) x^k \quad \text{เลือก } C_0(r_2) = 1 \text{ เพื่อความสะดวก}$$

ถ้า $\phi_1(x)$ และ $\phi_2(x)$ ดังกล่าวเป็นอิสระเชิงเส้น จะได้คำตอบของ (1) คือ

$$y = A \phi_1(x) + B \phi_2(x)$$

(ปัญหาความเป็นอิสระเชิงเส้นและอนุกรมลู่เข้ามีอภิปรายใน Coddington AN

INTRODUCTION TO ORDINARY EQUATIONS 1964.)

กรณีที่มีคำตอบนี้ จะเห็นว่า $r_1 \neq r_2$ และ $r_1 - r_2$ ไม่เป็นจำนวนเต็มบวก k ใดเลย เพราะถ้า $r_1 - r_2 = k_1$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก k_1 , $q(r) = (r - r_1)(r - r_2) = 0$

$$= (r - (r_2 + k_1))(r - r_2) = 0$$

ทำให้ $q(r_2 + k_1) = 0$ จะหา C_{k_1} ไม่ได้

ถ้า $r_1 - r_2$ เป็นจำนวนเต็มบวก จะหาคำตอบในบางช่วง $0 < x < r_0$ ได้จากการสังเกต

$$L\phi(x, r) = c_0 q(r) x^r \quad \text{ซึ่ง} \quad \phi(x, r) = c_0 x^r + x^r \sum_{k=1}^{\infty} C_k(r) x^k$$

หา $C_k(r)$ จากสูตรหมุนเวียน

$$\begin{aligned} C_0(r) &= c_0 \neq 0 \\ q(r+k) C_k(r) &= -D_k(r) \\ D_k(r) &= \sum_{j=0}^{k-1} [(j+r)a_{k+j}b_{k-j}] C_j(r) \quad , k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

กรณี $r_2 = r_1$

เราได้ $q(r_1) = 0$, $q'(r_1) = 0$

$$\frac{\partial}{\partial r} L\phi(x, r) = L \frac{\partial}{\partial r} \phi(x, r)$$

$$= c_0 [q'(r) + (\ln x) q(r)] x^r = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad r = r_1$$

ซึ่งเห็นชัดว่าฟังก์ชัน $\frac{\partial}{\partial r} \phi(x, r_1)$ สอดคล้องกับสมการ $Ly = 0$ อีกฟังก์ชันหนึ่ง จะได้คำตอบสองคำตอบคือ

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= x^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} C_k(r_1) x^k \\ \phi_2(x) &= \frac{\partial}{\partial r} \phi(x, r_1) = x^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} C'_k(r_1) x^k + (\ln x) x^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} C_k(r_1) x^k \\ &= x^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} C'_k(r_1) x^k + (\ln x) \phi_1(x) \end{aligned}$$

จึงสังเกตว่า $C'_k(r_1)$ หาค่าได้ทุก $k = 0, 1, 2, \dots$ เพราะ C_k เป็นฟังก์ชันเศษส่วนของ r ซึ่งส่วนไม่เป็น 0 ณ $r = r_1$

กรณี $r_1 = r_2 + m$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก m เมื่อกำหนดค่า c_0 จะได้

$C_1(r_2), \dots, C_{m-1}(r_2)$ หาค่าได้ แต่เนื่องจาก

$$q(r+m) C_m(r) = -D_m(r) \quad \dots \dots \dots (5)$$

ซึ่งจาก (5) เราจะเกิดปัญหาในการคำนวณ $C_m(r_2)$ เราแก้ปัญหานี้จากการสังเกต

$$q(r) = (r - r_1)(r - r_2)$$

$$q(r + m) = (r - r_2)(r + m - r_2)$$

ถ้า $D_m(r)$ มี $r - r_2$ เป็นตัวประกอบ แทนค่าใน (5) ได้

$$(r - r_2)(r + m - r_2) C_m(r) = -(r - r_2) E_m(r) \dots\dots\dots (6)$$

ตัด $(r - r_2)$ ออกจะสามารถหาค่า $C_m(r_2)$ ที่สอดคล้องกับ (6) ได้ นอกจากนั้นสามารถหาค่า

$$C_{m+1}(r_2), C_{m+2}(r_2) \dots \text{ได้ทั้งหมด}$$

การเลือก $D_m(r)$ มี $r - r_2$ เป็นตัวประกอบ ทำได้โดยการเลือก $C_0(r) = r - r_2$

เมื่อเป็นเช่นนี้ เราให้ $\psi(x, r) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} C_k(r) x^k$, ($C_0(r) = r - r_2$)

แทนค่าในสมการได้ $L \psi(x, r) = (r - r_2) q(r) x^r \dots\dots\dots (7)$

เมื่อให้ $r = r_2$ ได้คำตอบ $\psi(x) = \psi(x, r_2)$ ซึ่งมี $C_0(r_2) = C_1(r_2) = \dots = C_{m-1}(r_2) = 0$

เทอมแรกของ ψ จึงเริ่มต้นที่ C_m และมีรูป

$$\psi(x) = x^{r_2+m} \sigma(x) = x^{r_1} \sigma(x)$$

ซึ่ง $\sigma(x) = -\frac{1}{r_1+1} \phi(x, r_1)$ ดังนั้น $\phi(x, r_1)$ กับ $\psi(x)$ จึงไม่เป็นอิสระเชิงเส้นเพื่อจะได้คำตอบที่ 2 ที่เป็นอิสระเชิงเส้นกับ ϕ เราหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ r ของ (7)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(L \psi(x, r)) &= L \frac{\partial}{\partial r} \psi(x, r) \\ &= q(r) x^r + (r - r_1) [q'(r) + (\ln x)q(r)] x^r \end{aligned}$$

จะได้ว่า $\frac{\partial}{\partial r} \psi(x, r_2)$ เป็นคำตอบของสมการ $Ly = 0$

บรรณานุกรม

- สุรวิทย์ กองสาสนะ **Differential Equation**. พิมพ์ครั้งที่ 5 ไทยวัฒนาพานิช, 2524. 240 หน้า
- Apostal, Tom M. **Calculus Vol I**. New York, Blaisdell Publishing, 1965. 515 p.
- Apostal, Tom M. **Calculus Vol II**. New York, Blaisdell Publishing, 1965. 525 p.
- Agnew, Ralph, P. **Differential Equation**. 2nd edition, New York, McGraw-Hill. 485 p.
- Ayres, Frank. **Theory and Problem of Differential Equations**. Schaumn's Outline Series. New York, McGraw-Hill, 1952. 256 p.
- Coddington, Earl A. **An Introduction to Ordinary Differential Equations**. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1964. 292 p.
- Dettmans John W. **Intoduction to Linear Algebra and Differential Equations**. New York, McGraw-Hill, 1975. 404 p.
- Elsgolts, L. **Differential Equations and the Calculus of Variations** Trans. by George Yankovsky. Moscow, Mir Publishers, 1973. 440 p.
- Esser, Martinus. **Differential Equations**. Philadelphia, W.B. Saunder Company, 1968. 249 p.
- Eugene, Butkov. **Mathematical Physics**. Reading, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, 1968. 735 p.
- Fagg, S. V. **Differential Equations**. London, Hodder, 1980. 128 p.
- Finizio, N. and G.Ladas. **Ordinary Differential Equations with Modern Applications**. Belmont, California, Wadsworth Publishing Company, Inc., 1987. 380 p.
- Heading, J. **Ordinary Differential Equations**. London, George Allen & Unwin Ltd., 1971. 92 p.
- Ince, S. L. **Ordinary Differntial Equations**. New York, Dover Publications, Inc., 1956. 558 p.
- Kaplan, Wilfred. **Ordinary Differential Equations**. Reading, Massachusette, Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1958. 534 p.
- Kells, Lyman M. **Elementary Differential Equations**. 6th Edition. New York, McGraw-Hill, Inc., 1965. 430 p.

- Krieder, Donald L. and Others. **An Introduction to Linear Analysis.** Reading, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1966. 733 p.
- Langer, Rudolph E. **A First Course on Ordinary Differential Equations.** New York, John Wiley & sons, Inc., 1954. 249 p.
- Nielsen, Kaj L. **Differential Equations.** 2nd Edition. New York, Barnes & Noble, Inc., 1966. 276 p.
- The Open University. **Jordan Normal Form and Differential Equations III.** Buckinghamshire, The Open University, 1972. 34 p.
- Rainville, Earl D. and Phillip E. Bedient. **Elementary Differential Equations** 3rd Edition. New York, Macmillan, 1964. 524 p.
- Simons, George F. **Differential Equations with applications and Historical Notes.** New York, McGraw-Hill, Inc., 1974. 465 p.
- Spiegel, Murray R. **Theory and Problems of Laplace Transforms.** Schaum's Outline Series. New York, McGraw-Hill, Inc., 1965. 261 p.
- Spiegel, Murray R. **Applied Differential Equations.** 3rd Edition. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1981. 654 p.

๑

ก.		ค.(ต่อ)	
กฏ		คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์	
การสลายตัว	119	รูป-แบบโพรมิอุส	192,201
การดูดกลืนของลัมเบิร์ต	125	รูป-แบบไมซ์ดแจ็ง	18
การเย็นตัวของนิวตัน	124	รูป-แบบอนุกรมยกกำลัง	194-196
ของนิวตันเกี่ยวกับ		รูป-แบบอนุกรมรอบจุด	
แรงโน้มถ่วงทั่วไป	126	โคคเคียวปรกติ	197,199,202-207
เคอร์ซอพ	110	คุณสมบัติ	
การกำจัดตัวคงค่าไม่เจาะจง	22	ของการแปลงลาปลาซ	177,182,184,185
การแปลงเชิงเส้น	8,143,159,177,180	ตัวดำเนินการดิฟเฟอเรนเชียล	145
การแปลงลาปลาซ, ผล-	176	โค้งจอมแห	90
การแปลงผกผันลาปลาซ	174-181	เคอนิล	8
การเลื่อนเอกซ์โพเนนเชียล	146,178		
		ง.	
ข.		เงื่อนไขค่าขอบ (boundary condition	
ขั้นตอนการแก้สมการ		หรือ boundary value)	30
สัมประสิทธิ์เอกพันธ์	34	เงื่อนไขต้น (initial condition	
โดยใช้ผลการแปลงลาปลาซ	184	หรือ initial value)	19,29
โดยใช้ตัวลบล้าง	161-162	เงื่อนไขลิปชิตซ์	213
โดยวิธีแปรค่าพารามิเตอร์	166		
ขึ้นต่อกันเชิงเส้น	131	จ.	
		จุดธรรมดา	193
ค.		จุดโคคเคียว	192,197-198
ครึ่งชีวิต	116	จุดโคคเคียวปรกติ	197,198
ความเป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น	6,131		
คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์	15	ช.	
ทั่วไป	16	ของหุ้ม	18
เฉพาะ	16		
โคคเคียว	17	ฐ.	
รูป-แบบซัดแจ็ง	18	ฐาน	7,148,151

ค.		ป.	
ค็กริ		ปฏิกิริยาโมเลกุลคู่	121
ของสมการเชิงอนุพันธ์	14	ปฏิกิริยาโมเลกุลเดี่ยว	121
ของความเป็นเอกพันธ์	31	ปฏิกิริยาคำตอบ	130
ค็ทอรัมิแนนท์กัจด	23	ปฏิกิริยั้งกัชัน	9
ค็ทอรัมิแนนท์วองแคร้มง	138	ปฏิกิริยัเวกเตอร์	6,131
ค.		ปัญหาค่าขอบ	30
คั้วคงค้ำ		ปัญหาค่าเริ่มต้น	29
ของการสลายตัว	116	ปัญหารถกวาดหิมะ	125
ความเร็วปฏิกิริยา	120	ปัญหาสารละลาย	119
ไม่เจาะจง	16,20	ผ.	
คั้วค้ำเนนการคิฟเฟอเรนเชียล		ผลคูณภายใน	8,166
เชิงเส้น	139-143	ผลต่างอนุพัทธ์แม่นตรง	37,49
คั้วประคอบเพื่อกินทิกเรด	44	ผลการแปลงลาปลาซ	176,178
คั้วแปรตาม	13	ผลการแปลงผกผันลาปลาซ	180
คั้วแปรอิสระ	13	แผ่คลุม	7
คัวลบค้ำง	150	พ	
ท.		พหุนามแอร์มิต	197
ทราเจกทอรี		ฟ.	
มุมฉาก	22,88	ฟังก์ชัน	
มุมจากตัวเอง	96	ต่อเนื่องเป็นตอนๆ	175
มุมเท่า	92	เติมเต็ม	161
ทฤษฎีบทการมีคำตอบหนึ่งเดียว		เบื้องต้น	190
สำหรับสมการอันดับ 1	11,18,212	วิเคราะห์	191
สำหรับสมการอันดับ n	19,218	เอกพันธ์	31,32
ทฤษฎีบทการมีคำตอบเมื่อสัมประสิทธิ์		อยู่ในกำกับของฟังก์ชัน	
เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์	192	เอกซ์โพเนนเชียล	174
ทฤษฎีบทของเลอร์ค	179,220	ม.	
น.		มิติ	7,149
แนวที่ความชันเท่ากัน	68,70		

ร.		ส.(ต่อ)	
รากสมการช่วย		สมการโกดซ์มิติซ์	122
เป็นจำนวนจริงแตกต่างกัน	151	สมการช่วย	150
เป็นจำนวนจริง มีรากซ้ำ	152	สมการเชิงเส้นอันดับ 1	54
เป็นจำนวนเชิงซ้อน	155	สมการครรรชนี	201,221,229
รูปสมการ		สมการครรรชนีของสมการออยเลอร์	199
แกลโรต	78	สมการเชิงอนุพันธ์	12
เชิงเส้นอันดับ 1	54	แบบธรรมดา	13
เชิงเส้นอันดับ n	128	แบบพาร์เซี่ยล	13
อันดับ 1 ดีกรี 1	27	อันดับของ-	14,15
อันดับ 1 ดีกรีมากกว่า 1	73	ดีกรีของ-	14,15
		สมการซึ่งสามารถแก้หาค่า x ได้	82
		สมการซึ่งสามารถแก้หาค่า y ได้	79
ลบล้าง	150	สมการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวคงค่า	131
		สมการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นฟังก์ชัน	
		วิเคราะห์	197
วงจรไฟฟ้า		สมการที่แยกตัวประกอบได้	73
อย่างง่าย	110	สมการแบบแยกตัวแปรได้	28
หลักพื้นฐานของ-	110	สมการเบสเซล	205
RC	113	สมการแบร์นูลลี	55
RL	111	สมการมิใช่เอกพันธ์	159
ววนสเกียน	134	สมการแม่นยำตรง	37
วิธีแก้สมการ		สมการรีกาคติ	57
ใช้ตัวลบล้าง	161	สมการลาแกร์	199
แปรค่าพารามิเตอร์	164	สมการสัมประสิทธิ์เอกพันธ์	33
หาอนุพันธ์ต่อกันไป	193	สมการของออยเลอร์	199
เทียบสัมประสิทธิ์	194	สมการเอกพันธ์	128,130
		สมการเอกพันธ์ที่เกี่ยวข้อง	159
		สมการแอร์มิต	199
สนามทิศทาง	68,69,70	สมการแอร์	199
สภาคห้อง	121	สมการไฮเพอร์บิออเมริก	199,208
สมการแกลโรต	17,78		

ส.(ต่อ)

สูตรของไลบ์นิตซ์สำหรับ

การหาอนุพันธ์	145
---------------	-----

สูตรหมุนเวียน	201-204,206,222
---------------	-----------------

ห.

หน่วยแสดงความชัน	68,70
------------------	-------

อ.

อินทิกรัลมิใช่อินทิกรัลเบื้องต้น	28
----------------------------------	----

อุปทาน	124
--------	-----

อุปสงค์	124
---------	-----